CICLO DE FORMAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

CONTRIBUIÇÕES DO ENSINO, DA PESQUISA E DA EXTENSÃO NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

José Carlos Gonçalves Gaspar
André Luiz Souza Silva
Marcelo Silva Bastos
Vilmar Gomes da Fonseca
Organizadores

Pantanal Editora
2022

José Carlos Gonçalves Gaspar
André Luiz Souza Silva
Marcelo Silva Bastos
Vilmar Gomes da Fonseca
Organizadores

Ciclo de formação em ensino de matemática: contribuições do ensino, da pesquisa e da extensão na formação do professor de Matemática

Pantanal Editora

2022

Copyright© Pantanal Editora
Editor Chefe: Prof. Dr. Alan Mario Zuffo
Editores Executivos: Prof. Dr. Jorge González Aguilera e Prof. Dr. Bruno Rodrigues de Oliveira

Diagramação: A editora. **Diagramação e Arte:** A editora. **Imagens de capa e contracapa:** Canva.com. **Revisão:** O(s) autor(es), organizador(es) e a editora.

Conselho Editorial

Grau acadêmico e Nome	**Instituição**
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos	OAB/PB
Profa. Msc. Adriana Flávia Neu	Mun. Faxinal Soturno e Tupanciretã
Profa. Dra. Albys Ferrer Dubois	UO (Cuba)
Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior	IF SUDESTE MG
Profa. Msc. Aris Verdecia Peña	Facultad de Medicina (Cuba)
Profa. Arisleidis Chapman Verdecia	ISCM (Cuba)
Prof. Dr. Arinaldo Pereira da Silva	UFESSPA
Prof. Dr. Bruno Gomes de Araújo	UEA
Prof. Dr. Caio Cesar Enside de Abreu	UNEMAT
Prof. Dr. Carlos Nick	UFV
Prof. Dr. Claudio Silveira Maia	AJES
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos	UFGD
Prof. Dr. Cristiano Pereira da Silva	UEMS
Profa. Ma. Dayse Rodrigues dos Santos	IFPA
Prof. Msc. David Chacon Alvarez	UNICENTRO
Prof. Dr. Denis Silva Nogueira	IFMT
Profa. Dra. Denise Silva Nogueira	UFMG
Profa. Dra. Dennyura Oliveira Galvão	URCA
Prof. Dr. Elias Rocha Gonçalves	ISEPAM-FAETEC
Prof. Me. Ernane Rosa Martins	IFG
Prof. Dr. Fábio Steiner	UEMS
Prof. Dr. Fabiano dos Santos Souza	UFF
Prof. Dr. Gabriel Andres Tafur Gomez	(Colômbia)
Prof. Dr. Hebert Hernán Soto Gonzáles	UNAM (Peru)
Prof. Dr. Hudson do Vale de Oliveira	IFRR
Prof. Msc. Javier Revilla Armesto	UCG (México)
Prof. Msc. João Camilo Sevilla	Mun. Rio de Janeiro
Prof. Dr. José Luis Soto Gonzales	UNMSM (Peru)
Prof. Dr. Julio Cezar Uzinski	UFMT
Prof. Msc. Lucas R. Oliveira	Mun. de Chap. do Sul
Profa. Dra. Keyla Christina Almeida Portela	IFPR
Prof. Dr. Leandris Argentel-Martínez	Tec-NM (México)
Profa. Msc. Lidiene Jaqueline de Souza Costa Marchesan	Consultório em Santa Maria
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann	UFJF
Prof. Msc. Marcos Pisarski Júnior	UEG
Prof. Dr. Marcos Pereira dos Santos	FAQ
Prof. Dr. Mario Rodrigo Esparza Mantilla	UNAM (Peru)
Profa. Msc. Mary Jose Almeida Pereira	SEDUC/PA
Profa. Msc. Núbia Flávia Oliveira Mendes	IFB
Profa. Msc. Nila Luciana Vilhena Madureira	IFPA
Profa. Dra. Patrícia Maurer	UNIPAMPA
Profa. Msc. Queila Pahim da Silva	IFB
Prof. Dr. Rafael Chapman Auty	UO (Cuba)
Prof. Dr. Rafael Felippe Ratke	UFMS
Prof. Dr. Raphael Reis da Silva	UFPI
Prof. Dr. Renato Jaqueto Goes	UFG
Prof. Dr. Ricardo Alves de Araújo (*In Memorian*)	UEMA
Profa. Dra. Sylvana Karla da Silva de Lemos Santos	IFB
Msc. Tayronne de Almeida Rodrigues	
Prof. Dr. Wéverson Lima Fonseca	UFPI
Prof. Msc. Wesclen Vilar Nogueira	FURG
Profa. Dra. Yilan Fung Boix	UO (Cuba)
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme	UFT

Conselho Técnico Científico

- Esp. Joacir Mário Zuffo Júnior
- Esp. Maurício Amormino Júnior
- Lda. Rosalina Eufrausino Lustosa Zuffo

Ficha Catalográfica

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

C568 Ciclo de formação em ensino de matemática [livro eletrônico] : contribuições do ensino, da pesquisa e da extensão na formação do professor de Matemática / Organizador José Carlos Gonçalves Gaspar... [et al.]. – Nova Xavantina, MT: Pantanal, 2022. 84p.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
ISBN 978-65-81460-37-2
DOI https://doi.org/10.46420/9786581460372

1. Simetria. 2. Matemática – Estudo e ensino. I. Gaspar, José Carlos Gonçalves. II. Silva, André Luiz Souza. III. Bastos, Marcelo Silva. IV. Fonseca, Vilmar Gomes da.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Nossos e-books são de acesso público e gratuito e seu download e compartilhamento são permitidos, mas solicitamos que sejam dados os devidos créditos à Pantanal Editora e também aos organizadores e autores. Entretanto, não é permitida a utilização dos e-books para fins comerciais, exceto com autorização expressa dos autores com a concordância da Pantanal Editora.

Pantanal Editora

Rua Abaete, 83, Sala B, Centro. CEP: 78690-000.
Nova Xavantina – Mato Grosso – Brasil.
Telefone (66) 99682-4165 (Whatsapp).
https://www.editorapantanal.com.br
contato@editorapantanal.com.br

Prefácio

Estimado(a) Leitor(a),

O que é apresentado nesta obra é resultado do trabalho docente incessante e de alta qualidade durante a maior crise sanitária desde a gripe espanhola no século XX. A pandemia do novo coronavírus causou a disseminação mundial da Covid-19, o isolamento social, *lockdowns* ao redor do mundo, quarentenas e milhares de contaminações e óbitos que poderiam ter sido evitados. Mas como as contaminações e óbitos poderiam ser evitados se pouco se conhecia acerca do novo vírus?

A resposta está também em cada capítulo desta obra. Contaminações e óbitos poderiam ter sido evitados se os conhecimentos científicos produzidos em diversas ciências, entre as quais a Matemática, tivessem sido levados em consideração desde o início da pandemia. Uma lição preciosa e dura que podemos tirar de 2 anos de pandemia é que ouvir a Ciência, desenvolver o pensamento científico, educar pelas práticas científicas remotas, híbridas e semipresenciais, além de valorizar os profissionais da educação brasileira é a senha para que em novas ondas pandêmicas estejamos mais preparados.

Assim, cada educador(a) que escreveu suas pesquisas nesta obra científica representa a força e a competência do profissionalismo docente brasileiro, promovendo ações remotas durante a pandemia com tecnologias móveis com materiais adaptados e lúdicos para atrair a atenção de milhares de estudantes que tiveram que estudar em suas casas, muito deles com extrema dificuldade de conexão de internet, mas sempre com o amparo e a dedicação dos professores e de suas famílias.

Destacamos as ações docentes que buscaram reduzir a desigualdade social e tecnológica em muitos lares brasileiros com ações de alfabetização científica online promovendo oficinas, *lives*, aulas síncronas e assíncronas em ambientes virtuais de aprendizagem, em suas universidades e institutos federais, para que cada estudante pudesse continuar seus estudos e compreender que somente com um pensamento crítico é possível combater as atrocidades promovidas por dois vírus.

Um vírus, o da covid-19, que a ciência conseguiu combater por meio da criação de vacinas em centros de pesquisa de instituições públicas brasileiras como o Butantan e a Fiocruz em parcerias com milhares de pesquisadores de universidade públicas brasileiras e estrangeiras. O segundo vírus que é tão letal quando o primeiro que é o vírus da desinformação que geram as denominadas *fake news*, também só é possível ser combatido com uma "vacina", a alfabetização científica capaz de gerar cidadãos críticos e capazes de ler, e interpretar conhecimentos, informações e notícias falsas.

Para combater ambos os vírus, ficou claro durante dois anos de pandemia que a Educação e a atuação de Educadore(a)s comprometidos com a Ciência promoverá estabilidade e segurança nas futuras ações híbridas que permearão o denominado "novo normal". Nessa nova caminhada, mais do que antes, a ação dos educadores será decisiva em aulas híbridas, contextos inter e transdisciplinares, com metodologias ativas, em aulas inclusivas e propostas de sala de aula invertida, realização de projetos de

extensão, ações de iniciação científica e salas de aula transformadas em laboratórios para investigação científica.

Por fim, que todos o(a)s educadore(a)s brasileiro(a)s se inspirem nos conteúdos, saberes e conhecimentos problematizados nos capítulos dessa importante obra, elaborada para a divulgação científica.

Que mesmo diante dos maiores desafios sociais e profissionais cultivemos cada vez mais em nossas práticas educativas o verbo *esperançar* ensinado e exemplificado pelo nosso educador e patrono da educação Paulo Freire, *esperançar* no sentido de seguirmos em frente cientes dos aprendizados durante a pandemia e cientes de que na pós-pandemia o caminho deve ser iluminado pelas luzes da Ciência.

Que estejamos unidos a Todo(a)(e)s que creem que a Educação pode libertar qualquer povo das garras de regimes totalitários e neofascistas que maltratam e excluem.

Juiz de Fora, 15 de abril de 2022.

Marco Aurélio Kistemann (Pesquisa de Ponta-UFJF)

Sumário

Prefácio **4**

Introdução **7**

Capítulo I **11**

Simetria Axial na pandemia da covid-19: uma proposta didática com recurso do uso de dobraduras e o GeoGebra 11

Capítulo II **28**

Práticas Didáticas Interativas e Avaliativas no Ensino Remoto 28

Capítulo III **44**

Conceitos elementares de Geometrias não euclidianas na Escola Básica: Por quê? Para quê? 44

Capítulo IV **63**

Problematização dos números reais com aplicativos: Descobrindo lacunas na reta numérica 63

Índice Remissivo **80**

Autores **81**

Organizadores **83**

Introdução

O laboratório itinerante é uma ação do Laboratório de Ensino de Matemática (LabEM) que se iniciou em parceria com Pibid e tem por objetivo levar aos alunos de escolas públicas do entorno do campus metodologias norteadas pelas tendências em Educação Matemática que auxiliem na aprendizagem de conceitos matemáticos. Ações do laboratório itinerante acontecem desde 2018 e têm contribuído para o estímulo à prática da pesquisa para alunos do curso de licenciatura em Matemática da instituição, além de auxiliar os estudantes a superarem algumas dificuldades que surgem durante a aprendizagem dos conceitos matemáticos.

No momento, o laboratório tem realizado parcerias com algumas escolas da rede estadual de ensino do Rio de Janeiro que se localizam nos municípios de Mesquita e Nilópolis. As atividades realizadas com os alunos das escolas envolvidas exploram tanto conceitos matemáticos de forma interdisciplinar, como também jogos e sequências de ensino com uso de materiais manipulativos industrializados ou construídos com material de baixo custo. A aplicação dessa metodologia tem contribuído para aproximar o licenciando da realidade que vai atuar, pois, em muitas realidades, a escola não dispõe de recursos didáticos que possibilitem uma construção significativa de conceitos matemáticos. Nesse sentido, o uso desses recursos a partir de materiais de baixo custo pode contribuir para que os futuros professores sejam instrumentalizados quanto à construção de materiais que atendam às diferentes necessidades dos alunos quanto à aprendizagem da Matemática.

Vendo o bom andamento do projeto e a possibilidade de ampliação dele, em 2019 o projeto foi submetido a fomento à Coordenação de Extensão (Coex) do IFRJ, sendo aprovado em dezembro desse mesmo ano. Durante o início de 2020, ainda no período de planejamento das ações com as escolas parceiras, houve a necessidade de paralisação das atividades presenciais por conta da epidemia da covid-19. Nesse instante, foi necessário reestruturar o projeto para que suas ações fossem em formato remoto. Dessa maneira, realizamos uma oficina pelo *google meet* na XXV Semana de Tecnologia (Sematec), com colaboração da equipe do projeto *Desenvolvimento Jogos Digitais na Educação*[1] (DJDE) do Colégio de Aplicação da UFRJ e do Projeto de Pesquisa *Pesquisa de Ponta, ligado* à Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), com o título *Despertando para educação financeira: uma introdução gamificada*. Nela houve a participação de alunos do ensino médio, do curso de licenciatura em Matemática, professores de Matemática da Educação Matemática e uma professora de ensino superior.

Além da participação na Sematec, foi desenvolvido um ciclo de formação com transmissão pelo canal do Laboratório Ensino de Matemática (LabEM) no YouTube, com quatro encontros. No primeiro encontro, o professor Fernando Villar (CAP-UFRJ) ministrou a oficina *Práticas Didáticas Interativas e*

[1] Site do projeto disponível em https://www.jogosdigitais.cap.ufrj.br/

Avaliativas no Ensino Remoto[2]. Nela ele apresentou um pouco da sua experiência com os alunos do Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro durante a pandemia do coronavírus. O segundo encontro foi com o professor Luiz Felipe Lins (SME-RJ), por meio da palestra *Desenvolvendo competências e habilidades por meio da metodologia de projetos nas aulas de matemática*[3], que falou a respeito da sua experiência com alunos da rede municipal de educação da cidade do Rio de Janeiro, incluindo o projeto que o conduziu ao "Prêmio Shell de Educação Científica" em 2020. No terceiro encontro, a professora Ana Kaleff (UFF) proferiu a palestra *Conceitos elementares de Geometrias não euclidianas na escola básica: por quê? Para quê?*[4], em que apresentou reflexões sobre o ensino da geometria não euclidiana na escola básica frente às orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em que se destaca a importância do ensino e aprendizagem da geometria não euclidiana na escola básica no contexto da escola do século XXI. No quarto e último encontro do ciclo, as professoras Daniela Mendes (Uerj – Laboratório Sustentável de Matemática/Seeduc) e Darling Domingos (Laboratório Sustentável de Matemática/Seeduc) desenvolveram a oficina *Ensino de números reais com multimeios*[5].

Por fim, em junho de 2021, foi realizada a oficina *Aprendendo Geometria com as Mãos* em formato remoto. Tal ação foi em parceria com uma escola pública da rede estadual de ensino do Rio de Janeiro, localizada no município de Mesquita, na Baixada Fluminense, tendo a participação de alunos do 6º. ao 9º. ano do ensino fundamental. Ela ocorreu em dois encontros, que permitiram o desenvolvimento do conceito de simetria com apoio de dobraduras.

Como fruto de parte das ações realizadas durante o projeto, apresentamos este *ebook* composto por quatro capítulos, que serão descritos a seguir:

No primeiro capítulo, Geometria na Pandemia, os autores André Luiz Souza Silva, José Carlos Gonçalves Gaspar e Vilmar Gomes da Fonseca apresentam uma proposta didática inovadora para o ensino de simetria axial, com base em uma sequência didática de quatro tarefas exploratórias com recurso de dobraduras, recortes e uso de tecnologias digitais. Essa proposta didática resulta de ações do LabEM Itinerante do IFRJ/Campus Nilópolis, a partir da realização de um projeto de extensão realizado numa escola pública do município de Mesquita-RJ, e teve como base uma experiência de ensino que foi planejada e executada em contexto de ensino remoto, durante o advento da pandemia da covid-19 nessa escola. Os autores apresentam as premissas que influenciaram a construção da proposta didática, a saber: (i) o contexto da pandemia e o seu conjunto de limitações e desafios impostos; (ii) a escolha de conteúdo

---

[2] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=fYOgdh15mL4&list=PLjcNnx9286N-NarGpF9dTASmdtrv-Elpi, com 1644 visualizações em 15 de abril de 2022.

[3] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=oqJohU8Yhsw&list=PLjcNnx9286N-NarGpF9dTASmdtrv-Elpi&index=2, com 750 visualizações em 15 de abril de 2022.

[4] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=YxeW-2q_TMM&list=PLjcNnx9286N-NarGpF9dTASmdtrv-Elpi&index=3, com 755 visualizações em 15 de abril de 2022.

[5] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=6yOFpdqD-tw&list=PLjcNnx9286N-NarGpF9dTASmdtrv-Elpi&index=4, com 583 visualizações em 15 de abril de 2022.

de geometria que considera as ideias de Felix Klein (1849-1925) no programa Erlangen; e (iii) práticas emergentes para o ensino de matemática que consideram o uso de recursos manipuláveis e tecnológicos. A seguir, apresentam uma descrição comentada da proposta didática e seus objetivos, e finalizam propondo reflexões sobre possibilidades de criação de ambientes de ensino promotores de aprendizagens significativas.

No segundo capítulo, intitulado *Práticas Didáticas Interativas e Avaliativas no Ensino Remoto*, o autor, a partir do Ensino Remoto Emergencial (ERE) que surgiu no ano de 2020 como alternativa para dar continuidade às atividades escolares e, simultaneamente, preservar a saúde de estudantes e docentes, durante a pandemia causada pelo vírus Sars-CoV-2, discute que inicialmente muitos docentes se posicionaram contrários ao ERE porque entendiam que não seria possível fazer ensino remoto de qualidade na educação básica. No entanto, com o passar dos dias e o estudo e a dedicação de milhares de docentes em todo o mundo, foram criados caminhos alvissareiros para a educação frente aos desafios que se apresentaram. Neste texto são apresentadas algumas práticas didáticas desenvolvidas e utilizadas por docentes do Colégio de Aplicação da UFRJ, de forma que o potencial dos recursos digitais fosse demonstrado por meio das avaliações positivas de estudantes, responsáveis, licenciandos e docentes de diferentes disciplinas.

No terceiro capítulo, cujo tema é *Conceitos elementares de Geometrias não euclidianas na escola básica: por quê? Para quê?*, a autora espera responder a algumas questões que acredita serem pertinentes a esse tempo da pandemia provocada pelo novo coronavírus, bem como para o futuro, com os ensinos híbrido e remoto. Apresenta um conjunto de questões relacionadas às geometrias não euclidianas (GNE) que podem levar o(a) leitor(a) a pensar não ter ligação com a pandemia. Para responder ao "por quê?" do título, a autora apresenta como entende a criação de novos conhecimentos científicos e as lógicas envolvidas com as ações relacionadas ao pensamento científico que os embasam, à Educação e à Matemática. Para tanto, inicia com uma breve introdução histórica à geometria euclidiana; em seguida, contextualiza como surgiram as GNE e as consequências desse surgimento para as Ciências e para a pandemia. Para responder ao "para quê?" se introduzir as GNEs no Ensino Médio, analisa como o pensamento científico e o ensino das representações matemáticas são apresentados na Base Nacional Comum Curricular, bem como eles se interligam em relação à pandemia; elenca alguns resultados de pesquisas realizadas, no âmbito da formação de professores de Matemática e do livro didático; e finaliza com considerações sobre exemplos de GNE que podem ser utilizados na escola básica.

A fim de contribuir para a apropriação das tecnologias digitais por parte dos professores de matemática e para seu uso com intencionalidade didática, o texto do quarto capítulo, *Problematização dos números reais com recursos da Geometria Dinâmica: Descobrindo lacunas na reta numérica*, introduz um conjunto de atividades educacionais pensadas para a problematização e a aprendizagem dos números reais com o uso de recursos tecnológicos escolhidos de maneira a propiciar uma abordagem interativa e dinâmica do tema.

São três construções eletrônicas, chamadas de *applets*, que favorecem a exploração de importantes orientações didáticas.

Para finalizar, agradecemos à direção do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro – Campus Nilópolis pelo apoio dado a esse projeto de extensão por meio de fomento oriundo do edital interno nº 11.

Capítulo I

Simetria Axial na pandemia da covid-19: uma proposta didática com recurso do uso de dobraduras e o GeoGebra

Recebido em: 30/3/2022
Aceito em: 30/4/2022
10.46420/9786581460372cap1

André Luiz Souza Silva[1]
José Carlos Gonçalves Gaspar[1]
Vilmar Gomes da Fonseca[1]

INTRODUÇÃO

O recente contexto da pandemia mundial da covid-19, causada pelo novo coronavírus (Sars-Cov-2), suscitou várias questões pedagógicas e/ou relacionadas aos processos de ensino e aprendizagem em Matemática. Os verbos inovar (Rodrigues et al., 2021; Silva et al., 2020), reformular, repensar (Engelbretch et al., 2020), adequar, ampliar e outros foram recursivamente preenchendo o cotidiano e a pesquisa em registros de experiências que refletiam as condições impostas pela pandemia necessárias para o desenvolvimento dos conhecimentos próprios da matemática, remetidos ao ambiente escolar nas suas diversas relações (professor-ensino, aluno-aprendizagem, professor-aluno-conhecimentos...).

A urgência da prática, e consequentemente da troca de experiências que suscitassem sucesso e/ou melhores resultados diante da caracterização experimental que vivemos, pode agora ser comparada a outras urgências, que, no cenário geral do ensino da matemática escolar, em particular da geometria, foram naturalmente sendo trazidos à tona como uma confluência entre necessidade, eficiência, novos e antigos rumos.

Várias pesquisas em educação em todo o mundo reconheceram em panorama internacional problemas e desafios associados à transição abrupta do ensino presencial para o ensino remoto.

> Entre as principais dificuldades destacam-se as condições para a operacionalização do ensino a distância, nomeadamente os problemas de rede, a falta de equipamentos adequados e a diversidade (e desigualdade) no acesso a recursos tecnológicos por parte de professores e alunos (Judd et al., 2020; Zhang et al., 2020 *apud* Flores et al., 2021)

Neste texto, apresentamos uma experiência que foi concebida num projeto de extensão que, durante o advento da pandemia, passou a considerar três grandes influências:

[1] Instituto Federal Educ. Ciência e Téc. do Rio de Janeiro

1. o contexto da pandemia e o seu conjunto de limitações e desafios impostos;
2. uma escolha de conteúdo em geometria que considera as ideias de Felix Klein (1849 – 1925) no programa Erlangen;
3. as reflexões sobre as práticas emergentes que consideravam os recursos manipuláveis ao considerar as influências 1 e 2.

Pensada como uma ação do Laboratório de Ensino de Matemática (LabEM) do curso de Licenciatura em Matemática do IFRJ, campus Nilópolis, tal experiência teve como objetivo propor reflexões sobre possibilidades de vencer as limitações decorrentes da pandemia e, ao mesmo tempo, propor perspectivas sobre os conteúdos e as práticas pedagógicas específicas aos respectivos conhecimentos em geometria e a realidade da escola.

Nesse sentido, no que se refere às Transformações Geométricas (isometrias), pensou-se a proposta sob a influência das ideias de Felix Klein no programa Erlanger (Fernandes, 1984), tomando a possibilidade de se ter as isometrias do plano euclidiano dadas pelas transformações geométricas de Translação, Simetria e Rotação como conceitos centrais na constituição dos conhecimentos em geometria, em particular da constituição de processos de aprendizagem que privilegiam a construção da argumentação em Matemática. Dada a participação ativa de monitoras voluntárias e bolsistas, este estudo também inferiu sobre a construção de novas perspectivas para a prática do professor de matemática.

Nossa hipótese foi que um cenário profícuo de rupturas e novos contratos didáticos estão se estabelecendo com base nas necessidades da prática docente do professor de matemática na pandemia e, por isso, algumas dessas especificidades mostram uma configuração especial que pode ser bastante rica para a possibilidade de aproximar a geometria presente na matemática escolar aos conhecimentos contemporâneos nesta área.

O projeto de extensão ocorreu em conjunto com o CIEP 111 Gelson Freitas, localizado na cidade de Mesquita, no estado do Rio de Janeiro. Essa instituição, além de pertencer à Baixada Fluminense, entorno geográfico do IFRJ, tem um histórico de parcerias com projetos de extensão, de estágio e com o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) oriundos do IFRJ.

Neste núcleo de extensão do IFRJ participaram três licenciandas que se encontravam em momentos diferentes de formação. A primeira cursava o 2º período, e era considerada recém-ingressa, mas já estava participando do PIBID. A segunda, que já havia cumprido quase 50% dos créditos do curso e estava realizando na mesma época, em tal escola, o PIBID. E uma terceira, que participou do programa

de iniciação à docência Residência Pedagógica (RP) e que está encerrando o seu Trabalho de Conclusão de Curso.

A ação do projeto foi realizada durante o mês de junho de 2021, tendo sido planejada em meses anteriores, juntando os argumentos teóricos aos dados trazidos pela professora regente da escola e algumas considerações das licenciandas que realizavam o PIBID na mesma escola. O quadro informativo indicava que a escola estava com dificuldades em atingir de maneira satisfatória os alunos, mas, em consequência da parceria com o projeto de extensão, acreditávamos que outras formas de agir naquele momento poderiam significar melhoria nas ações e nas formas de relacionamentos da escola com os seus alunos.

A ação realizada vai de encontro ao objetivo do projeto de extensão, que é oferecer aos alunos das escolas públicas do entorno do IFRJ um ambiente em que se desperte o prazer de descobrir e aprofundar conhecimentos de uma forma lúdica, bem como propiciar a integração do licenciando em Matemática com as unidades escolares do entorno do campus, permitindo, assim, que esse futuro professor tenha a oportunidade de refletir sobre o ensinar e aprender Matemática na Educação Básica.

Propomos aqui a apresentação dessa experiência pela descrição de nossas influências, de nossa concepção de ensino para as isometrias, seguida de uma análise dos recursos materiais e tecnológicos empregados na ação. Os resultados dos contributos e limitações dessa experiência para a compreensão dos estudantes sobre simetria axial, embora fazendo parte da investigação mais alargada a que referimos no âmbito do projeto de extensão, por questões de limitação de espaço neste texto, serão apresentados e discutidos em outras publicações.

A referida descrição se inicia com um olhar sobre o ensino de matemática, com base em determinações documentais das reformas das décadas de 30 e 40 e, mais tarde, a reforma conhecida como Matemática Moderna, nas décadas de 1960 e 1970, as quais nos mostram que a disciplina de matemática na escola básica sofreu mudanças profundas que, ainda hoje, quase um século após a primeira dessas reformas, ao considerarmos a prática dos professores com relação à Geometria, podemos considerar em desenvolvimento.

Para elucidar essa premissa, realizamos uma breve digressão, com olhar centrado em pontos que incidem diretamente sobre as Transformações Geométricas. Omitimos uma descrição ampliada que complementa nossa exposição ao considerar a história e a história do ensino da Matemática no Brasil presente em Pavanello (1989).

ENSINO DE ISOMETRIAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA BREVE DIGRESSÃO HISTÓRICA

Na Reforma Campos, segundo Soares et al. (2004) no que se refere "aos programas de matemática e suas instruções pedagógicas, houve apenas uma apropriação das inovações que vinham sendo implementadas de forma paulatina, desde 1929, no Colégio Pedro II, tendo como protagonista o professor Euclides Roxo.

Enquanto diretor do Colégio Pedro II, Euclides Roxo havia implementado integralmente, pelo menos na lei, "de cima para baixo" e sem discussões prévias, todas as inovações defendidas por Felix Klein (Soares et al., 2004). Sua posição permitiu influenciar a Reforma Francisco Campos (1931) em relação à disciplina matemática a tal ponto que, nessa reforma, foram adotadas todas as ideias inovadoras defendidas por Euclides Roxo.

No entanto, essa implementação foi, por natureza, contrária à implementação pensada e executada na Alemanha sob a influência do idealizador original, Felix Klein.

> …a introdução dessas reformas curriculares "a partir das bases", atraindo o apoio de professores adequadamente treinados que atuariam como agentes para a implementação das reformas em escolas selecionadas (Schubring, 1999).

Além das muitas críticas e das dificuldades naturais de implementação subjacentes a uma proposta que soava por demais arbitrária e não tinha precedentes, a partir de 1934 novos rumos começaram a se efetivar na educação no Brasil, culminando na Reforma Gustavo Capanema, que foi promulgada 11 anos após a Reforma Francisco Campos. Diante desse quadro, é difícil avaliar os reflexos que as propostas de Euclides Roxo efetivamente tiveram no ensino da matemática no Brasil (Soares et al., 2004). Mas, no que se refere às Transformações Geométricas – das quais as isometrias são um caso particular – elas estiveram sob intenção explícita de Figurar no currículo e de uma forma totalmente diferente do que se entendia ser o ensino de Geometria até então.

O próximo momento com destaques para o ensino das Transformações Geométricas na matemática escolar se deu a partir do Movimento da Matemática Moderna (MMM). Nesse movimento, no Brasil, o ponto mais agudo relativo às Transformações Geométricas se deu pela tradução *ipsis litteris* da sugestão de Klein admitida para o ensino básico, na qual tais transformações eram apresentadas sob uma abordagem analítica com foco na teoria de conjuntos e com um desenvolvimento predominantemente da matemática do ensino superior. Havia o entendimento de alguns professores de que havia na proposta do MMM uma ênfase na unificação das linguagens utilizadas nos cursos superiores e na escola primária (Burigo, 1985).

E, nesse sentido, o ensino de geometria e, em particular, das Transformações Geométricas se transfigurou em crítico.

> O estudo da geometria, via Transformações Geométricas, é uma abordagem que possibilita o tratamento da geometria pelas estruturas algébricas, consideradas pelo MMM como elemento unificador da Matemática. Entretanto, segundo Pavanello (1993) o ensino de geometria sofre um gradual abandono nas últimas décadas no Brasil, apontando como uma das causas o fato de o MMM propor um trabalho com a geometria sob o enfoque das transformações e os professores, por sua vez, que já enfrentavam problemas em relação ao conhecimento na abordagem tradicional, acabaram por ter dificuldades ainda maiores com a proposição de programas nos quais a geometria era desenvolvida sob o enfoque das transformações (Duarte et al., 2006).

Dado o fracasso do MMM, novos paradigmas para o ensino de geometria foram amplamente aclamados por professores e pesquisadores. E, pelo menos três décadas depois, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), vigentes a partir do final dos anos noventa no Brasil, admitiam destaque para o papel das Transformações Geométricas nos processos de ensino e aprendizagem na matemática escolar. Em especial, tomando-se a sugestão de tê-los como conhecimentos que permitem "o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas Figuras sejam congruentes ou semelhantes" (Brasil, 1998).

Nos PCN, a ênfase dada aos conceitos geométricos reafirma que tais conhecimentos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, haja vista a possibilidade de se desenvolver nos alunos um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Esse posicionamento tinha a Resolução de Problemas como eixo central das orientações curriculares e de ensino de Matemática; e, nesse viés, as Transformações Geométricas Figuravam explicitamente no ensino básico em todos os ciclos desde as séries iniciais.

Ribeiro (2016), ao olhar para as influências de Klein no programa Erlanger e analisar os PCN, concluiu que nesse documento as Transformações Geométricas passaram a estar integradas ao ensino de geometria na escola básica desde o primeiro dos quatro ciclos da etapa do Ensino Básico – o que atualmente corresponde de 1º ao 8º ano. Além de também estarem presentes no Ensino Médio.

Nos PCN, a orientação sobre as Transformações Geométricas previa uma introdução experimental e intuitiva, explorando os conceitos de simetria (em particular relacionados à simetria axial). Havia ainda a orientação de que paulatinamente houvesse uma ampliação e aprofundamento nos 3º e 4º. ciclos, com a exploração de temas mais complexos, como a percepção de elementos que permanecem invariantes e os que variam quando são utilizadas as Transformações Geométricas. Um ponto que não necessariamente estava sob os argumentos de Klein e apareciam nos PCN é o fato de as construções

geométricas com instrumentos como régua, compasso, transferidor serem sugeridas para verificação das propriedades das duas Figuras envolvidas, ou seja, a original e a transformada.

A partir de 2012, com o Pacto Nacional da Idade Certa (PNAIC), um programa que envolveu quase todo o país, tendo a universidade em parceria com a escola básica, promovendo intensivos cursos de aperfeiçoamento profissional docente, havia para as Transformações Geométricas a orientação do trabalho intuitivo desde o momento de alfabetização matemática, anterior à escrita e leitura. A realização do programa nas escolas, construído com a participação dos professores daquele segmento, foi interrompida em meados de 2015. Mas também significou um marco que colocou as Transformações Geométricas como conteúdo de Geometria, agora em todo o Ensino Básico.

As recentes orientações curriculares para o ensino de Matemática, chamadas de Base Nacional Comum Curricular (BNCC), não necessariamente são um documento de continuidade dos anteriores, apesar de terem interseções com os que as sucederam e de sua autoapresentação como um conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais. Mesmo sendo recente e igualmente autoritária como as orientações educacionais anteriores aqui já mencionadas, a BNCC sofre críticas severas ao seu conteúdo e forma, mas traz orientações claras sobre um lugar específico para o conteúdo reconhecido como Transformações Geométricas no ensino de geometria.

É nesse sentido que a BNCC diverge da proposta de Klein, pois o conteúdo que integra os conhecimentos essenciais se esvai da possibilidade de integrar conhecimentos outros em geometria. Ao se revestir dessa essencialidade, se compromete com uma agenda de competências de Educação que, admitidas em outro sentido, até poderiam integrar uma construção dialética de conhecimentos, mas, ao que tudo indica, foram concebidas para sua inserção na escola e sociedade, admitindo exclusivamente o viés da aplicação ao mundo físico e com forte apelo ao mundo do trabalho, como a BNCC diversas vezes ressalta.

Por outro lado, há na BNCC referências a uma integração daquilo que para Klein seriam geometrias diferentes da Geometria Euclidiana, uma vez que admitem, por exemplo, a habilidade EM13MAT509.

> (EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital (Brasil, 2018).

Especificamente falando das Transformações Geométricas, ao repetirmos o olhar de Ribeiro (2016) agora para a BNCC, vemos que elas Figuram nessas orientações desde o letramento matemático e com ênfases que, em princípio, podem ser pensadas como aquelas que deslocam o conhecimento estrito sobre as Transformações Geométricas de volta para o sentido dado originalmente no século passado por

Klein. Isso porque, ao apresentar a unidade temática Geometria para os anos iniciais do ensino fundamental, cita que

> É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as Transformações Geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência (Brasil, 2018).

A apresentação dessa unidade temática segue explicitando as intenções de aprofundamento para os segmentos seguintes, propondo para o desenvolvimento desses conhecimentos em um cenário de combate às práticas que se restringem ao maciço uso exclusivo de fórmulas e em prol de um desenvolvimento que é novamente conflituoso ao que propõe de Klein, pois explicitamente expõe objetivamente a influência dos contingentes históricos.

> Assim, a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam "fazer a quadratura de uma Figura"). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau (Brasil, 2018).

Para Klein (2016), embora estejamos inclinados a admitir teoricamente os conteúdos sob a influência de contingentes históricos, isso não garante que o façamos na prática. É importante percebermos que Klein reconhecia que, numa história recente das Geometrias, vários tópicos elementares continuam desprezados em detrimento da "tradição" euclidiana. Essa sutil colocação de Klein propõe uma liberdade de escolha de prática e vínculo ao que de fato são aplicações do conhecimento matemático que exclui as restrições, por exemplo, ao mundo do trabalho.

Para o Ensino Médio, a BNCC ainda prevê sobre os estudantes que

> Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma Figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de Figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança (Brasil, 2018).

E, especificamente sobre as Transformações Geométricas, se desenvolva a habilidade

> (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir Figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras) (Brasil, 2018).

Esses poucos pontos finais da BNCC, se considerados a partir da trajetória de ensino sugerida nas reformas, movimentos e orientações curriculares no Brasil, especialmente relativamente aos conhecimentos em Geometria – em especial às Transformações Geométricas – ratificam o sentido inicial

de nossa digressão, ou seja, de ainda estarmos desenvolvendo as possibilidades de se ter um ensino de Geometria que leve em consideração as Geometrias unificadas em um grande campo de conhecimento e esteja alicerçado pela construção de conhecimentos próprios da matemática escolar.

Feita nossa breve digressão histórica do ensino das Transformações Geométricas no Brasil, cabe explicitar o que significa para nós a influência de Felix Klein e do Programa Erlanger na presente proposta de oficina.

O ENSINO DE ISOMETRIAS NA PERSPECTIVA DO LABEM

O trabalho referente à atividade de extensão do LabEM pautou-se nas três influências já mencionadas. O contexto da pandemia influenciou a escolha dos recursos, e a influência de Klein considerou a expectativa de ensino de Geometria que nos pareceu evidenciar novos caminhos.

A proposta de Klein (2016) no capítulo dedicado exclusivamente ao ensino de Geometria tinha três bases: os antecedentes históricos; o contraste aos requisitos modernos; e a crítica ao ensino tradicional. Nesses três pontos, Klein resume uma visão pedagógica que questiona uma tradição de ensino que não coloca em discussão vantagens e desvantagens de uma orientação referenciada por marcos históricos exclusivamente referenciados em Euclides, que marginalizam outros tópicos de outras geometrias. Ao falar dos requisitos modernos, Klein discorre sobre a necessidade de o conhecimento matemático ser em si descompartimentado, em especial, com os conhecimentos em geometria e outros campos, mas argumenta num sentido amplo para a matemática.

Ainda, ao reconhecer os fatores que ele chamou de requisitos modernos, Klein discorre brevemente sobre 5 pontos: aspectos psicológicos do aprendizado; uma adequação e coerência de escolha de tópicos de ensino; uma adequação aos objetivos de ensino em respeito às orientações culturais que se desvencilhem do puro utilitarismo e correspondam a um desenvolvimento amplo moral e cultural; o protagonismo do professor do ensino fundamental nas escolha dos tópicos e suas abrangências, dada a possibilidade de ser este o único profissional especializado para isso; e, por fim, o rompimento dos processos de ensino que negligenciam a intuição espacial tridimensional.

Para o terceiro ponto, Klein discorreu mais elencando vários pontos em que sua proposta poderia suscitar novas formas de se compreender o ensino de geometria na escola e termina sua argumentação com pontos que chamou de lástimas, visto refletirem um desenvolvimento na matemática escolar que não tem qualquer valor no ensino superior. Vários argumentos de Klein correspondem a práticas atuais, outros ainda são dignos de discussão. Mas não estão diretamente ligados às questões de ensino e aprendizado das transformações que aqui queremos mostrar num cenário mais amplo.

Nosso entendimento de uma influência de Klein e de seu programa Erlanger se dá em resumo na crença de que, com a busca por novos entendimentos sobre as geometrias e o ensino de geometria na matemática escolar, é possível encontrar um lugar para as Transformações Geométricas que são isometrias, tal que esta posição

1. permita aos estudantes uma aquisição intelectual ampla que os faça capazes de participar do trabalho na atualidade, mas que seja substancialmente possível de ser orientado para as diversas geometrias e suas aplicações;
2. possibilite aos professores serem críticos dos modelos de ensino de geometria entendendo a pluralidade das geometrias e as possibilidades de sua unificação, mantendo o professor do Ensino Básico com as rédeas dos processos e dos tópicos a serem escolhidos como peças fundamentais dos conhecimentos dos alunos desse segmento;
3. permita a professores e alunos extrapolar os limites da Geometria Euclidiana considerando uma seleção de conteúdos que deem conta de todo o campo das geometrias, rompendo com a exclusividade de seleção e quase exclusividade da Geometria Plana e Euclidiana, em decorrência de uma tradição escolar pautada apenas em um vínculo histórico.

A delimitação dessa influência incidiu parcialmente também nas escolhas dos recursos didáticos que foram escolhidos para compor a sequência didática trabalhada na oficina. Sobre esse ponto, passamos a discorrer no tópico seguinte.

RECURSOS DIDÁTICOS

Para enfrentar o desafio do isolamento social decorrente da covid-19, os professores da escola de campo também tiveram de se adequar a tal cenário e considerar uma abordagem de ensino remoto. Adotaram um modelo de ensino composto de atividades síncronas *on-line* e assíncronas, realizadas por meio de plataformas digitais ou AVEA – Ambientes Virtuais de Ensino e Aprendizagem, de tal modo que esta integrasse o uso de recursos didáticos que incentivassem a descoberta, a experimentação e a visualização dos conceitos matemáticos, utilizando tecnologias digitais, jogos digitais, materiais reutilizáveis, videoaulas e *podcasts*, reafirmando o cenário indicado por Flores et al. (2021).

Nossa proposta de sequência didática para essa escola-campo se deu considerando a necessidade de encontrar soluções didáticas que possibilitassem um ambiente de aprendizagem dos conteúdos matemáticos rico e eficaz, atendendo à excepcionalidade do contexto de ensino remoto (Flores et al., 2021, Hodges et al., 2020) e assumindo que o uso de sequências didáticas de tarefas exploratórias que integrem recursos didáticos manipuláveis e/ou tecnologias digitais, quando consideradas a exploração e as conexões entre as diferentes representações dos conceitos matemáticos, quando bem planejado e

executado, favorece a participação ativa dos alunos nas aulas de matemática e uma aprendizagem mais efetiva dos conceitos matemáticos (Fonseca, 2019).

No que se refere especialmente às Transformações Geométricas, o uso de dobraduras tem sido objeto de práticas do LabEM que já incidem nas disciplinas de Ensino de Matemática do curso ao qual o laboratório está vinculado. As dobraduras constituem um recurso didático manipulável que possibilita o estímulo, a autonomia e a participação ativa dos alunos, possibilitando-lhes o desenvolvimento dos seus raciocínios geométricos na aprendizagem dos conteúdos de Geometria (Lopes et al., 2015). Esse recurso também é referenciado em diversas outras pesquisas e nas orientações curriculares para o ensino de matemática (Brasil, 2018; NCTM, 2000). Sendo assim, optamos pelo uso de dobraduras conhecidas como Origami, que frequentemente são adotadas no ensino de Geometria e constituem-se em um instrumento que possibilita a exploração simultânea de aspectos bidimensionais e tridimensionais dos conceitos matemáticos, em particular simetria axial (Murari, 2011).

Para apoiar o uso das dobraduras, recorremos ao uso do software de Geometria dinâmica Geogebra. Esse *software* de aquisição e uso gratuito, por meio de *download* na *internet*, tem ganhado cada vez mais relevância nas investigações em Educação Matemática, por permitir a criação de aplicativos dinâmicos e interativos (*applets*), contendo construções geométricas planas e espaciais, possibilitando a *visualização* dos conceitos matemáticos, a *conexão entre as suas diferentes representações* e a promoção dos *processos de raciocínio matemático*, aspetos que são considerados importantes no ensino de simetria axial (Fonseca & Henriques, 2021). O Geogebra foi usado para criar situações de simetria que seriam incentivadas pelas dobraduras. Também utilizamos vídeos do Youtube a fim de instruir a construção das dobraduras selecionadas.

OFICINA APRENDENDO GEOMETRIA COM AS MÃOS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Tomou-se como objetivo da oficina a ação de experimentar para reconhecer isometrias no plano por meio de uma sequência didática preestabelecida. E, para tanto, intencionamos promover uma ação analítica que fosse descontraída e lúdica, ou seja, que pudesse ser estímulo por meio de uma ação com dobraduras, mas carregada de elementos importantes sobre simetrias.

O caráter lúdico foi estabelecido no sentido de Piaget, ou seja, com a intenção de que cada aluno estivesse implicitamente realizando desejos próprios ao mesmo tempo em que estivesse realizando uma exploração de ideias no momento da ação. Mas também no sentido de Vygotsky (1987, 1991) *apud* Pimentel (2008).

> As funções psicológicas superiores instrumentalizam novas modalidades de pensamento, implicando mecanismos capazes de hierarquizar simbolicamente os conceitos, relacionando-os uns aos outros numa rede de generalizações, e de operar com instrumentos mediadores

descontextualizados, isto é, independentes dos contextos concretos em que foram originados (Pimentel, 2008).

Quadro 1. Sistematização dos objetivos da sequência didática.

Tarefa	Objetivos	Ações
Tarefa 1: Dobradura do avião	Reconhecer a transformação de simetria no plano	· Construção de origami avião de papel e identificação de elementos geométricos (polígonos, ângulos, etc.) resultantes das dobraduras. · Exploração de *applet* do GeoGebra que contém uma construção geométrica da planificação do avião para o estudo de simetria axial.
Tarefa 2: Bandeirinha do Mario Bros	Identificar os lados e ângulos simétricos e suas medidas.	· Construção de bandeirinha do Mario Bros a partir de dobraduras e recortes com uma folha de papel. · Exploração de *applet* do GeoGebra que contém uma construção geométrica da bandeirinha para o estudo da simetria axial.
Tarefa 3: Máscara logo dos transformers.	Reconhecer e construir Figuras simétricas.	· Construção de Figuras simétricas a partir de dobradura e recorte de papel. · Exploração de *applet* do GeoGebra que contém uma construção geométrica da máscara transformers para o estudo da simetria axial.
Tarefa 4: Simetria no mundo!	Reconhecer simetria axial em outros contextos.	· Realização de pesquisa na internet sobre objetos, imagens e pinturas que contenham simetria axial.

A sequência didática trabalhada era composta de quatro tarefas e foi construída com o objetivo de promover a compreensão do conceito de simetria axial. Essa sequência foi pensada e estruturada de forma a conduzir os estudantes à experimentação, visualização e descoberta de aspetos relacionados a esse conceito matemático, nomeadamente, eixo de simetria, pontos, segmentos, ângulos, distâncias e polígonos simétricos, entre outros, a partir de construções por meio dobraduras e explorações dinâmicas de *applets* do GeoGebra. A sistematização dos principais objetivos dessas tarefas bem como as respectivas ações realizadas pelos estudantes, visando promover a compreensão da simetria axial, são apresentadas

no quadro 1. As descrições das tarefas da sequência didática estão disponíveis no link https://drive.google.com/file/d/1xnHBn6-TqMGT7omYYTLWjZpj4-VhqNow/view?usp=sharing.

A tarefa 1 tem como foco a exploração das noções intuitivas de simetria axial. Para isso, os estudantes devem construir um avião de papel, seguindo as instruções de passo a passo da dobradura disponível no link https://youtube.com/shorts/0PHo5wdTobo?feature=share. Após certificar-se de que todos os alunos já construíram e experimentaram o avião, o professor deve conduzi-los à análise da planificação do avião, identificando pontos, segmentos, retas, ângulos simétricos e a resolução das questões 2) até 5), tal como especificamos na Figura 1.

Em especial as tarefas 1 e 2 consideram que a apropriação de conceitos pelo contato com objetos espaciais pode ser considerada levando em conta que a habilidade de percepção visual e os conceitos de geometria podem ser aprendidos simultaneamente (Hoffer, 1997; Grande, 1994).

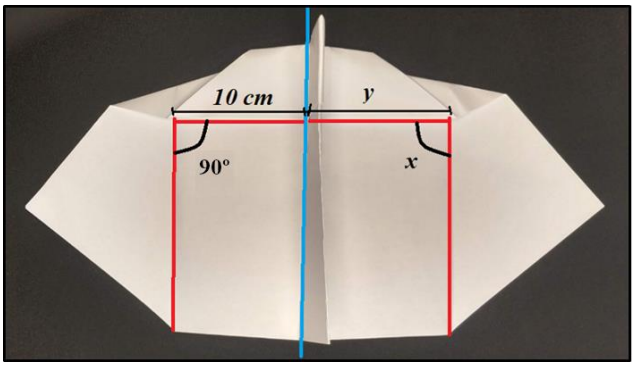
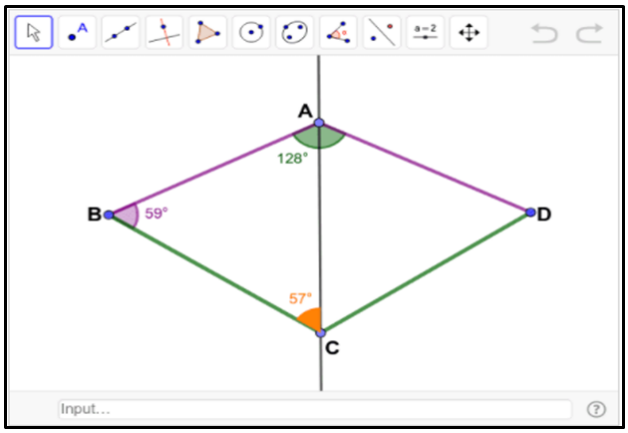


Figura 1. Ilustração de planificação do avião utilizado na aplicação da tarefa 1.

Na tarefa 2, os alunos receberão uma folha de papel quadrada e devem recortar um triângulo, a partir de um eixo de simetria (dobra horizontal ou vertical) para a construção de uma bandeirinha do Mario Bros (de formato triangular). Com auxílio de um applet do Geogebra contendo a planificação desta bandeirinha (Figura 2), o professor deve conduzir os alunos à análise das medidas dos elementos simétricos no polígono da bandeirinha. O foco dessa tarefa é refletir sobre algumas propriedades do triângulo e losango, ângulos opostos congruentes, pares de lados Figura 2: Ilustração de *applet* do Geogebra utilizado na aplicação da tarefa 2, o qual pode ser acessado através do link https://www.geogebra.org/m/eyadgx5s.



A tarefa 3 propõe explorar o reconhecimento e a construção de Figuras simétricas. Os alunos devem observar a imagem da logo dos Transformers e identificar o seu eixo de simetria. O professor deve realizar explorações em um *applet* do Geogebra (Figura 3), modificando pontos e segmentos, e questionar os alunos sobre a existência de eixo de simetria na imagem Transformers. Após esse momento, o professor propõe aos alunos que construam uma máscara simétrica a partir de uma folha de papel utilizando dobraduras e recortes (com tesoura) e destaquem pares de elementos simétricos.

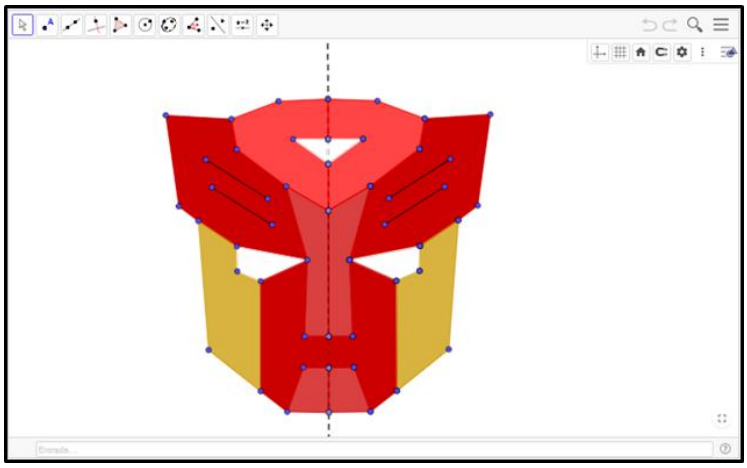


Figura 3. Ilustração de *applet* do Geogebra utilizado na aplicação da tarefa 3, o qual pode ser acessado através do link https://www.geogebra.org/m/rvmk3egb.

Na tarefa 4, os alunos devem realizar uma pesquisa na internet, jornais ou revistas, sobre imagens de objetos, pinturas, etc. que apresentam simetria axial. A realização dessa pesquisa tem como objetivo conduzir os alunos ao reconhecimento de simetria axial em outros contextos.

PERSPECTIVAS SOBRE A PRÁTICA DIDÁTICA

Esta Oficina é, para nós do LabEM, uma oportunidade de compartilhar uma proposta didática para o ensino de conceitos matemáticos, numa perspectiva que entende uma história de influências e

orientações curriculares e pretende encontrar um espaço de ação que considere as Geometrias no lugar de uma Geometria. Consideradas num cenário em que vários estudos compõem a área de pesquisa que conhecemos como Educação Matemática, torna-se autoexplicativo o fato de as influências de Klein, por nós consideradas, sugerirem atividades que se distinguem em essência das que são vistas na realidade de nosso entorno de pesquisa no LabEM.

Nosso principal destaque e prospecção está em sugerir que professores e futuros professores pensem as simetrias com um papel autônomo ao de outros conteúdos, permitindo acontecer também enlaces e suportes intuitivos e formais relativos aos conhecimentos de Geometria Euclidiana Plana que ainda Figura nas escolas que conhecemos. Da mesma forma, consideramos que a proposta apresentada se enquadra nos ambientes de sala de aula presencial e de ensino híbrido sem que isso seja uma forma de contornar as adversidades causadas pela pandemia da covid-19.

Ao envolver nessa proposta o uso de materiais manipulativos concretos, virtuais e recursos tecnológicos de uso livre e gratuito, pensando em alunos em classes presenciais ou remotas, esperamos que esta proposta sirva de incentivo e apoio às práticas docentes dos professores de Matemática, fazendo-os reconhecer o potencial desses recursos didáticos para criar ambientes de ensino promotores de aprendizagens significativas. O modo como esses recursos didáticos interferem no processo de aprendizagem referente às simetrias precisa ser investigado com profundidade a fim de possibilitar reflexões mais robustas sobre essa abordagem inovadora de ensino.

Acreditamos, por fim, que as atividades sugeridas podem contribuir para a formação dos alunos, uma vez que uma visão inovadora que contempla os conhecimentos em geometria com uma perspectiva ampliada permite construir resultados novos e profícuos. Essas possibilidades estão ancoradas pelas oportunidades de se construir em conjunto práticas docentes diferenciadas com os futuros professores de matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brasil (1997). Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental. Brasília, MEC/SEF.

Brasil (1998). Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental. Brasília, MEC/SEF.

Brasil (2018). Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília.

Burigo, E. Z. (1985) Movimento da Matemática Moderna no Brasil: estudo da ação e do pensamento e do pensamento de educadores nos anos 60. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação-

Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/163050 Acesso em 17 mar. 2022.

Duarte, A. R. S. et al. (2006). Abaixo Euclides e acima quem? Uma análise do ensino de geometria nas teses e dissertações sobre o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Práxis Educativa (Brasil), 1(1), 87-93. Disponível em: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=89410109

Engelbretch, J.; Llinares, S.; Borba, M. C. (2020) Transformation of the mathematics classroom with the internet. ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 52, 825-841. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01176-4.

Fernandes, N. C. (1984) O programa de Erlangen de Felix Klein (considerações comparativas sobre as pesquisas geométricas modernas). Tradução de Normando Celso Fernandes. São Paulo: Instituto de Física da USP. Disponível em: <http://publica-sbi.if.usp.br/PDFs/pd499> Acesso em 17 mar. 2022.

Flores, M. et al. (2021) Ensinar em tempos de COVID-19: Um estudo com professores dos ensinos básico e secundário em Portugal. Revista Portuguesa de Educação, 1(34), 5-27.

Fonseca, V. (2019). Aprendizagem com compreensão dos conceitos de limite e continuidade: uma experiência de ensino com recurso ao GeoGebra na formação inicial de professores de matemática, no Brasil. 414f. Tese (Doutoramento em Educação) – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Fonseca, V.; Henriques, A. (2021) Pre-service mathematics teachers using Geogebra to learn about instantaneous rate of change. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, London, 1, 1-23. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1958942.

Hodges, C.; Moore, S.; Lockee, B.; Trust, T.; & Bond, A. (2020). The Difference between Emergency Remote Teaching and Online Learning. EDUCAUSE Review. Disponível em https://er.educause.edu/articles/2020/3/the-difference-between-emergency-remote-teaching-and-online-learning. Acessado em 22/05/2022

Judd, J.; Rember, B. A.; Pellegrini, T.; Ludlow, B.; & Meisner, J. (2020) This is Not Teaching": The Effects of COVID-19 on Teachers. Disponível em: https://www.socialpublishersfoundation.org/knowledge_base/this-is-not-teaching-the-effects-of-covid-19-on-teachers/. Acesso em 17 de dez. 2021.

Klein, F. (2016) Elementary Mathematics from a Higher Standpoint. Volume II: Geometry Translated by Gert Schubring. Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg, e-book.

Lopes, L. S.; Alves, G.; Ferreira, A. L. (2015) A Simetria nas Aulas de Matemática: uma proposta investigativa. Educação e Realidade, Porto Alegre, 40(2), 549-572. http://dx.doi.org/10.1590/2175-623646015.

Murari, C. (2011) Experienciando Materiais Manipulativos para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática. Bolema, Rio Claro, 25(41), 187-211.

National Council of Teachers of Mathematics - NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, Va.: NCTM.

Pavanello, R. (1989) O Abandono do Ensino de Geometria: Uma Visão Histórica. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas- UNICAMP: Faculdade de Educação. São Paulo.

Pimentel, A. (2008) A ludicidade na educação infantil: uma abordagem histórico-cultural. Psicologia da educação, 26, 109-133.

Ribeiro, M. A. da S. (2016) Transformações Geométricas Planas: um estudo experimental e dinâmico. Dissertação de Mestrado/ IME-USP, 233 p.

Rodrigues, C. K. et al. (2021) Metodologias da Educação Matemática para o ensino remoto: uma revisão sistemática da literatura. Educação Matemática em Pesquisa: Perspectivas e Tendências. Vol. 3. editora Científica digital. Disponível em: < https://downloads.editoracientifica.org/articles/210404429.pdf > Acesso em 12 de dez. 2021.

Schubring, G. (1999) O primeiro movimento internacional de reforma curricular em matemática e o papel da Alemanha: um estudo de caso na transmissão de conceitos. Zetetiké, Campinas: Cempem, 7(11), 29-49. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646833/13734> Acesso em 17 de dez. 2021.

Silva, A. V. de M. et al. (2021) Ensinando Matemática em tempos de pandemia. Revista Educação Pública, 21(16). Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/16/ensinando-matematica-em-tempos-de-pandemia> Acesso em 7 de nov. 2021.

Soares, F. dos S. et al. (2004) Ensino de matemática no século XX – da Reforma Francisco Campos à Matemática Moderna. Revista Horizontes, Bragança Paulista, 22(1), 7-15. <https://app.uff.br/riuff/bitstream/handle/1/1112/HORIZONTES_2004_SOARES_DASSIE_ROCHA.pdf;jsessionid=C5E43F22812CBEE6556A48F6F53EA268?sequence=1> Acesso em 7 de nov. 2021.

Yang, Y.; Vygotsky, L. S. (1987). Thinking and speech. In: Rieber, R. W. & Carton, A. S. (eds.). *The collected works of L. S. Vygotsky*, New York, Plenum Press, pp. 37-285.

Vygotsky, L. S. (1991). *Obras Escogidas.* Madrid: Visor. Tomo II [Conferencias sobre psicologia].

Zhang, W.; Wang, L.; & Wang, C. (2020). Suspending Classes Without Stopping Learning: China's Education Emergency Management Policy in the COVID-19 Outbreak. *Journal of Risk and Financial Management*, *13*(3), 55. https://doi.org/10.3390/jrfm13030055.

Capítulo II

Práticas Didáticas Interativas e Avaliativas no Ensino Remoto

Recebido em: 30/11/2021
Aceito em: 10/01/2022
10.46420/9786581460372cap2

Fernando Celso Villar Marinho[1*]

INTRODUÇÃO

O Ensino Remoto Emergencial (ERE) surgiu no ano de 2020 como alternativa para dar continuidade às atividades escolares e, simultaneamente, preservar a saúde de estudantes e docentes, durante a pandemia causada pelo vírus Sars-CoV-2. O termo emergencial foi escolhido para dar ênfase ao caráter necessário de improvisação na adoção de práticas didáticas no período de distanciamento social. Antes de ser um conceito definido *a priori*, se constituiu como uma tentativa de abarcar um conjunto de ações pedagógicas heterogêneas adotadas durante a pandemia de Covid-19. Contempla desde aulas mediadas por recursos digitais, redes sociais, dispositivos móveis, até materiais impressos disponibilizados aos estudantes. A relação professor-aluno, usualmente tão próxima e afetuosa, sofreu uma ruptura sem precedentes.

O campo da educação escolar como um todo se tornou um grande laboratório experimental de práticas didáticas inovadoras e com tantas abordagens distintas quantas foram as iniciativas apresentadas por escolas públicas e particulares. Neste sentido, cabe delimitar a concepção de ERE adotada na instituição de ensino na qual foram realizadas as práticas didáticas relatadas neste capítulo.

O ENSINO REMOTO EMERGENCIAL NO COLÉGIO DE APLICAÇÃO DA UFRJ

As principais marcas do Colégio de Aplicação (CAp) da UFRJ na constituição de seu modelo de Ensino Remoto Emergencial foram: a criatividade, a colaboração e a autonomia pedagógica. A elas também se soma, com destaque, o caráter democrático das decisões e definições, sempre realizadas no âmbito do Conselho Diretor, órgão colegiado com representação de estudantes, responsáveis, servidores técnico-administrativos, direção escolar e docentes. O modelo de ERE adotado no CAp UFRJ foi sendo

[1] Universidade Federal do Rio de Janeiro.
[*] fernandovillar@ufrj.br

modificado ao longo do tempo, em função do amadurecimento da comunidade e do aumento da percepção das dificuldades impostas pelas restrições sanitárias exigidas para o enfrentamento da pandemia.

Para contextualizar cronologicamente as fases de transformação do Ensino Remoto Emergencial no CAp UFRJ, vou apresentar algumas datas importantes. Em 13 de março de 2020, houve a suspensão das aulas tanto pela Reitoria da UFRJ como pelo governador do Estado do Rio de Janeiro, fato que pegou muitos de surpresa, afinal tudo estava acontecendo muito rápida naqueles dias. Na época falava-se em uma paralisação de 15 dias, o que foi insuficiente e, ao perceber que não seria só isso, já em 26 de março foi convocada uma reunião com os coordenadores para começar a estruturar os trabalhos pensando que poderia ser feito diante daquele contexto de medo do desconhecido. Eu era o coordenador do setor curricular de matemática e acompanhei esse processo de perto. Decidimos pela formação de uma comissão composta por docentes e técnicos que ficou responsável por criar um site que servisse de canal de comunicação entre estudantes e professores. O colégio já possuía um site institucional, mas houve um entendimento de que o formato não era adequado para a realização de um trabalho pedagógico e, portanto, seria importante ter um espaço adicional que tratasse melhor os aspectos de vínculos afetivos e emocionais e estabelecesse um canal de interação entre estudantes e docentes. A comissão responsável pelo site não era formada por especialistas em informática, mas por professores e servidores técnico-administrativos que compartilharam saberes e pesquisaram por alternativas que facilitassem o uso, a manutenção e a interação das pessoas. Este foi o ponto em que a marca da colaboração se mostrou mais forte. Não havia distinção entre dias de semana ou fins de semana. A equipe trabalhou de forma incansável até estruturar o site em uma plataforma que congregava qualidades como a versatilidade de uso, a possibilidade de interação dos participantes e a autonomia de gestão da equipe docente. O site denominado CAp UFRJ na Quarentena[2], Figura 1, foi lançado no dia 20 de abril de 2020, pouco mais de um mês após a suspensão das aulas presenciais, e marcou a primeira fase do ERE nesta escola. Caracterizado por muito afeto, o trabalho realizado nesta fase tinha como principal preocupação reestabelecer vínculos entre estudantes e professores por meio de um ambiente digital. A interação ocorria por meio de comentários no site, que foi feito com a versão gratuita da ferramenta comercial *wix* na versão mais básica. Havia um constante incentivo à colaboração por meio do compartilhamento de fotografias do cotidiano escolar e das vivências dos tempos de pandemia no âmbito familiar. Foram concebidos projetos capazes de estimular o protagonismo estudantil por meio da produção de materiais em vídeos, áudios, fotografias ou manuscritos. Outra característica marcante do site foi o trabalho interdisciplinar.

[2] https://capnaquarentena.wixsite.com/capufrj

Figura 1. Site CAp UFRJ na Quarentena. Fonte: o autor.

A segunda fase do ERE no CAp UFRJ teve início em 13 de julho de 2020, quando começaram os encontros síncronos, mas não obrigatórios, envolvendo professores e estudantes em oficinas pedagógicas com conteúdos variados. Nesta fase os professores se cotizaram para o pagamento de uma assinatura da Plataforma Zoom. Literalmente pagaram para trabalhar, mas consideraram importante visto que o tempo estava passando e havia uma percepção, por parte dos professores, da necessidade de estabelecer um vínculo mais próximo com os estudantes.

Nesta fase atuei em parceria com o Prof. Marcos Monte em duas oficinas, a saber: *Criando Enquetes: ferramentas de coleta, análise e representação de dados numéricos* e *Criação de Jogos Digitais*. O público-alvo das oficinas era formado por estudantes do 6º e 7º ano do ensino fundamental.

O texto de divulgação da primeira oficina tinha o intuito de chamar atenção dos estudantes e buscar ampliar a participação por adesão.

> Quanto você precisa economizar por mês para ter UM MILHÃO de reais aos 25 anos? Perguntas como essa estimulam nossa imaginação e podem ser respondidas de forma simples por meio de planilhas eletrônicas: ferramentas digitais extremamente potentes e pouco conhecidas. Quais são os esportes preferidos entre estudantes da sua escola? Todos da sua turma jogam videogame? Perguntas desse tipo podem ser transformadas em enquetes e os dados exibidos automaticamente na forma de gráficos. Nessa proposta vamos aprender como coletar, organizar e transmitir informações como essas a partir de ferramentas digitais gratuitas. Conhecimentos numéricos e algébricos serão demandados de forma natural e contextualizada. Além disso, vamos estimular espírito investigativo/questionador de cada participante por meio de uma abordagem gamificada. Já brincou de detetive? Caso goste desta brincadeira, nossa atividade foi feita para

> você! Os participantes vão coletar e analisar dados escolhidos por eles, mostrando o desenvolvimento do senso crítico e do espírito investigativo/questionador na produção de infográficos (Documento de divulgação Interna do CAp UFRJ. Arquivo do autor.).

Essa oficina estava integrada a um dos eixos definidos na reunião de série "Autoria e Tecnologia" e "Autoria com tecnologia: construção de novos caminhos digitais". Os encontros desta oficina tinham frequência quinzenal.

A segunda oficina também estava ligada ao mesmo eixo temático da primeira e o texto de divulgação está apresentado a seguir.

> A magia por trás dos jogos digitais é construída em pequenos blocos de conhecimento. Por meio de uma proposta gamificada e personalizada, cada estudante seguirá seu próprio ritmo. Vamos começar do básico, mas ao final quem participar desse projeto poderá até mesmo construir o seu próprio jogo digital! Nesse mergulho inicial na ciência da computação os termos normalmente usados por programadores tais como *loopings*, condicionais, variáveis e pixels passarão a fazer parte do vocabulário da garotada. Nossa proposta permite aos professores acompanharem em detalhes o progresso individual de todos os participantes. Quem se sentir à vontade poderá até incluir/criar um *nickname* e um avatar para nosso ranking semanal de progresso. As orientações de estudos seguirão em vídeo e por escrito por meios digitais tais como *emails* e redes sociais. A criatividade e a curiosidade serão as bases dessa proposta. A autonomia na aprendizagem será incentivada bem como a autossuperação. E aí, vai encarar o nosso desafio? (Documento de divulgação Interna do CAp UFRJ. Arquivo do autor.).

O diferencial da oficina de Criação de Jogos Digitais foi o uso de uma plataforma que permitia aos professores a visualização do código utilizado pelos estudantes na elaboração de seus jogos. Essa prática serviu de estímulo para buscar outras soluções tecnológicas que oferecessem o mesmo recurso em outros contextos. Os encontros desta oficina também ocorriam quinzenalmente. As duas oficinas ocorriam em semanas intercaladas e os estudantes participaram por adesão. A experiência vivenciada neste período serviu de referência para o trabalho que foi desenvolvido na terceira fase do ensino remoto emergencial no CAp UFRJ.

A 3ª fase do ensino remoto emergencial no CAp UFRJ teve início em 14/09/2020, após a efetivação dos editais de apoio financeiro e de compra de equipamentos para os estudantes que não possuíam tais recursos. Cabe destacar a importância do trabalho prévio de coleta de informações que foi realizado pela Comissão de Gestão das Ações do Sítio Eletrônico CAp UFRJ na Quarentena, ao definir a urgência de levantamento das condições de acesso de cada estudante da escola e de ações que buscassem formas alternativas de interação com estudantes sem acesso à internet ou com acesso precário. De acordo com o relatório da comissão, a coleta de informações ocorreu via formulário que

> Ficou disponível para preenchimento no período de 08/05/2020 a 26/05/2020. Após esse período, validou-se os dados dos formulários preenchidos comparando com as listagens nominais de 828 estudantes (809 com matrícula ativa e 19 com matrículas trancadas). E, no dia 03/06/2020, encaminhou-se à Direção a listagem de 283 estudantes não representados no primeiro período de preenchimento, ou seja, aproximadamente 34%. A partir do contato direto (e-mail e telefone) da Direção com as famílias que ainda não haviam respondido à pesquisa e divulgando novo link para preenchimento do formulário complementar com as mesmas questões do inicial, obteve-se 161 novos registros, constatando-se uma representação de 87%

> do corpo discente ativo, considerando a inclusão de dados numéricos até 20/06/2020. (Garcia et al., 2020).

As características da terceira fase do ERE no Colégio de Aplicação da UFRJ serão apresentadas na próxima seção.

MATERIAL E MÉTODOS

Antes de dar sequência ao texto propriamente dito, cabe um alerta ao leitor sobre o formato deste texto. Para preservar o paralelismo estrutural dos demais capítulos, optei por manter a nomenclatura das seções. Nesta seção, por exemplo, não será descrito um método de pesquisa, mas haverá um detalhamento do contexto de realização das experiências que serão relatadas.

O lócus de observação das práticas didáticas interativas e avaliativas descritas a seguir foi o Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro, por experiência direta do autor que atuou como professor de duas turmas do 6º ano do ensino fundamental. Como reportado na introdução, o caráter democrático foi muito importante e se configura como uma marca desta instituição nas decisões sobre as condutas docentes durante o período de ensino remoto emergencial. Tais decisões consolidadas em resoluções que definem e orientam as atividades letivas: Resolução nº 01/2020 (Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2020a) que dispõe sobre diretrizes para atividades pedagógicas não presenciais provisórias e transitórias para a Educação Básica na UFRJ durante o período de distanciamento social; Resolução nº 02/2020 (Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2020b) que dispõe sobre Reorganização do Calendário Letivo 2020 e a Resolução nº 03/2020 (Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2020c) que dispõe sobre as diretrizes internas para o trabalho de formação inicial docente - estágio e atividades complementares

A seguir destaco três artigos da 2ª resolução e os respectivos termos que serão usados ao longo deste texto com as definições aqui apresentadas.

> Art. 2o - Para cômputo de reorganização do Calendário Letivo de 2020 serão consideradas **6 (seis) horas/aulas diárias de ensino obrigatório** para o Ensino Fundamental e Ensino Médio; [...]
>
> Art. 3o - As **horas de ensino obrigatório em atividades pedagógicas não presenciais** serão divididas entre **síncronas** e **assíncronas**;
>
> Parágrafo 1o - As **atividades síncronas** são aquelas desenvolvidas em interação virtual entre professores e estudantes nas quais ambos estejam presentes em tempo real e em um mesmo ambiente virtual estabelecido pelo CAp-UFRJ;
>
> Parágrafo 2o - As **atividades assíncronas** são aquelas a serem desenvolvidas pelo estudante mediante orientação docente como estudos dirigidos, exercícios, leitura, pesquisas, projetos dentre outras, que serão encaminhadas semanalmente aos estudantes;

> Parágrafo 3o - Caberá **às reuniões de série as definições de divisão entre assíncronas e síncronas para cada série**, considerando a faixa etária de cada grupo e respeitando as especificidades de tempo, espaço e processos pedagógicos de cada segmento de ensino;
>
> Art. 4o - **A organização curricular das atividades pedagógicas não presenciais será definida pelo corpo docente em Reuniões de série** e deverá ser apresentada aos responsáveis de cada turma em reunião; (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, 2020b, grifo do autor)

O artigo 2º estabelece seis horas-aula como carga-horária didática diária para cada turma do ensino fundamental e médio. O artigo 3º esclarece a divisão desta carga-horária em atividades síncronas e assíncronas que, por sua vez, são definidas nos parágrafos 1º e 2º do referido artigo. O parágrafo 3º amplia a autonomia didática dos docentes desta instituição ao deixar a cargo das reuniões de série as definições quanto à organização das atividades pedagógicas não presenciais.

As definições relativas a esta organização foram tomadas em reuniões conjuntas envolvendo a equipe docente dos 6º e 7º anos do ensino fundamental. Para divisão das atividades síncronas e assíncronas os professores levaram em consideração uma recomendação da Sociedade Brasileira de Pediatria que indicava para adolescentes com idades entre 11 e 18 anos a limitação do tempo de exposição a telas e a jogos de videogames a 2-3 horas/dia. Assim, as 6 horas/aula diárias foram divididas em dois tempos de 45 minutos (1h30) para as atividades síncronas e quatro tempos de 45 minutos (3h00) para as atividades assíncronas.

Para que fosse possível atender à distribuição diária de dois tempos síncronos, as disciplinas foram agrupadas em temas.

Tema 1 – Espaços Reais e Espaços Virtuais

Tema 2 – A experiência de habitar espaços: um estudo sobre corpo, imagem e palavra

Tema 3 – Jovens Cientistas em casa

Tema 4 – Quem canta um conto, aumenta um canto: mitos, contos e cantos do mundo

Tema 5 – CriAções CriAtivas: fazemos e aprendemos

Tema 6 – Orientação Acadêmica

A formação dos temas ocorreu por meio de afinidade de propostas pedagógicas apresentadas em reuniões de série e por meio de trocas de informações em um arquivo digital de edição compartilhada. Devido à proporcionalidade na distribuição da carga-horária das disciplinas, a matemática e a língua portuguesa seriam disciplinas presentes em pelo menos dois temas. Assim, como professor de matemática, minha atuação ocorreu inicialmente nos temas 1 e 5 e posteriormente nos temas 1 e 6.

A organização do trabalho por temas propiciou a efetivação de um currículo interdisciplinar. Neste contexto, a interdisciplinaridade foi entendida como uma maneira de ensino em que os conteúdos de diferentes disciplinas se relacionam para estudar um tema com o objetivo de promover o aprendizado dos estudantes. Por meio dessa perspectiva pedagógica, a interdisciplinaridade rompeu com a ideia de segmentação das disciplinas, aproximando o conhecimento escolar das experiências da vida real, na qual os problemas não estão rotulados com indicativos de caminhos de solução ou com gabarito.

As famílias foram informadas que a realização de projetos interdisciplinares favoreceria a criação de estratégias de organização dos conhecimentos escolares em relação: (1) ao tratamento da informação e (2) à relação entre os diferentes conteúdos em torno das reflexões sobre problemas ou hipóteses de solução. Assim, os estudantes participariam na construção de seus conhecimentos ao transformar a informação procedente dos diferentes saberes disciplinares em conhecimento próprio.

As práticas didáticas relatadas nesta seção se referem a quatro turmas do segundo segmento do ensino fundamental, sendo duas do sexto ano, 16A e 16B, e duas do sétimo ano, 17A e 17B. As segundas e as quintas havia simultaneidade nas aulas das turmas 16A e 17A, das 8h30 às 10h00 e das turmas 16B e 17B das 10h30 às 12h00. Em um dos temas a minha atuação contemplou as quatro turmas, nos demais contemplou exclusivamente as turmas do 6º ano.

Houve uma padronização de uso de recursos tecnológicos a partir da terceira fase do ERE no CAp UFRJ e, em todos os temas, as atividades síncronas ocorriam por meio da Plataforma Google Meet e as atividades assíncronas eram disponibilizadas na Plataforma Google Classroom (ou Google Sala de Aula).

Agora, com a devida caracterização do contexto geral das atividades, vou detalhar as práticas no contexto dos temas em que atuei: Criações Criativas, Orientação Acadêmica e Espaços Reais e Virtuais. Este último com atuações diferenciadas nos anos de 2020 e 2021.

Tema: Criações Criativas

No tema "CriAções CriAtivas: Fazemos e Aprendemos" buscou-se uma abordagem de ensino-aprendizagem ativa e reflexiva, na qual cada estudante pudesse atuar como protagonista na construção do conhecimento por meio da investigação, da elaboração e da realização de experimentos físicos e virtuais. A intenção de propiciar uma experiência gamificada e colaborativa esteve presente no planejamento de todas as atividades síncronas e assíncronas.

A equipe docente inicialmente responsável pelo tema era formada por docentes de Francês (Profa. Miriam Levy e Prof. Luiz Paulo) e pelos dois professores de Matemática (Prof. Fernando Villar e Prof. Marcos Monte).

Neste tema adotou-se uma proposta didática interdisciplinar e interséries, envolvendo as disciplinas de matemática e francês no 6º e no 7º ano do ensino fundamental. As aulas do tema Criações Criativas ocorriam às quintas-feiras no período matutino. Semanalmente havia reuniões de planejamento com duração média de uma hora e meia.

A atuação dos docentes ocorria sempre em duplas e alternavam em função do planejamento geral. Buscou-se uma narrativa geral que abarcasse as duas disciplinas e as duas séries, mas respeitava-se a maturidade acadêmica dos estudantes bem como a demanda curricular própria de cada série. Em algumas semanas os professores de matemática entravam juntos na turma do sétimo ano enquanto os de francês estavam com o sexto e após 45 minutos, invertiam. Em outras semanas os professores de matemática e francês entravam juntos e ficavam durante 1h30 realizando o trabalho com intervenções interdisciplinares. Essa variação demandava um planejamento pormenorizado, cauteloso e constante.

Os professores também buscavam estabelecer conexões com as práticas e contextos presentes nos demais temas. Para fixar ideias, vou apresentar de forma resumida a dinâmica de uma das aulas. No tema *Espaços Reais e Espaços Virtuais* os estudantes estavam estudando a construção de maquetes virtuais com o uso do aplicativo SketchUp e tiveram acesso ao modelo tridimensional do 2º pavimento do Colégio de Aplicação. Por outro lado, no tema *Quem canta um conto, aumenta um canto* a professora de inglês havia apresentado um conto de origem africana sobre uma princesa guerreira chamada Yenega. A partir destas duas referências a equipe docente do tema Criações Criativas criou uma narrativa ficcional na qual o professor de francês se apresentou como um Griot que pedia ajuda dos estudantes para encontrar a lança mágica da Princesa Yennega que havia sido escondida no CAp UFRJ. Os griots, para alguns povos da África, são pessoas mais experientes que contam as histórias, narram os acontecimentos de um povo, passando as tradições para as gerações futuras. A caracterização da personagem denominada Mc Griot misturava os aspectos da tradição africana com a musicalidade do rap e do funk contemporâneos. Os estudantes questionaram como eles iriam ir até o colégio para encontrar a lança mágica se estávamos vivendo o período de distanciamento social no qual não seria possível visitar fisicamente a escola. Foi aí que se estabeleceu o vínculo com a maquete virtual tralhada no outro tema. A atividade ilustrada a seguir mostra a combinação de duas ferramentas digitais o Google Apresentações e o PearDeck[3]. Apresentamos a planta-baixa do segundo pavimento com a indicação de algumas salas e os estudantes deveriam, de

[3] https://www.peardeck.com/googleslides

forma interativa, posicionar os pins no lugar solicitado pelos professores, com dicas sobre onde estaria escondida a lança mágica da Princesa Yennega.

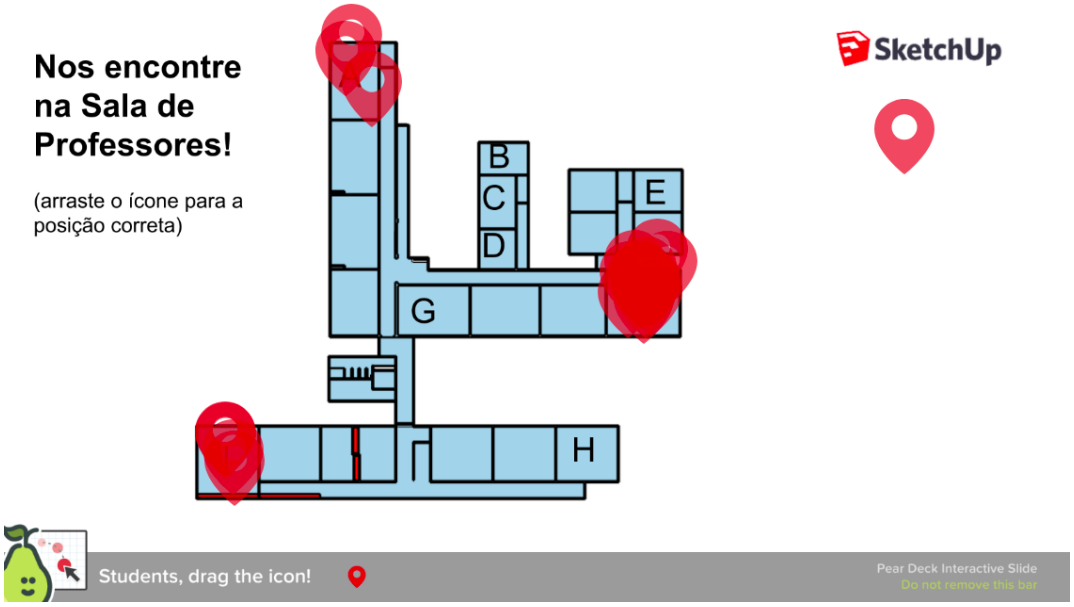


Figura 2. Atividade Interativa com Pear Deck – Mapa do CAp UFRJ. Fonte: o autor.

Do ponto de vista do conhecimento matemático foi possível, por exemplo, abordar a questão do deslocamento em croquis, lateralidade, visualização tridimensional. As questões de francês abordaram temas relativos a orientações e movimento. Além da tela representada na Figura 1, foram exibidas outras nas quais surgiam questões de múltipla escolha e questões de resposta aberta.

Cabe destacar que o uso dos recursos tecnológicos foi mediado pela estratégia didática docente que incorporou uma narrativa ficcional que serviu de suporte para a apresentação dos conteúdos e permitiu a contextualização interdisciplinar envolvendo matemática e francês.

Tema: Orientação Acadêmica

Com a chegada de um novo professor de matemática, cuja contratação atrasou devido a pandemia, eu saí do tema Criações Criativas e ingressei no tema: Orientação Acadêmica. Inicialmente idealizado para ser conduzido pelo Setor de Orientação Educacional (SOE) e por professores que se revezariam em um rodízio semanal, o tema tinha como objetivos o desenvolvimento de Oficinas de Orientação Acadêmica visando auxiliar cada estudante em sua adaptação à nova forma de se relacionar com colegas, professores(as), com a escola, bem como os estudos e demais tarefas diárias, no contexto de ensino remoto emergencial. Se constituiu como um espaço para escuta, trocas, organização da rotina, orientação para os estudos e reflexões sobre autoconhecimento, empatia, sociedade, meio ambiente e demais debates sugeridos pelos estudantes.

Figura 3. Meme criado usando o Google Apresentações. Fonte: o autor.

Neste tema, minha atuação mais marcante foi por meio das oficinas de formação para uso de ferramentas colaborativas. Em particular, por exemplo, o uso da ferramenta Google Apresentações. Ensinei os estudantes a incluir imagens, colocar textos, criar slides, compartilhar a apresentação no modo leitor e no modo editor. Este conteúdo não era previsto em nenhuma disciplina, mas serviria para todas porque os estudantes teriam caminhos para produção de trabalhos em grupo. Eles ficaram encantados ao ver que a alteração feita por um deles era visualizada por todos simultaneamente. Essa ferramenta interativa além de aumentar o engajamento, possibilitou aos estudantes a capacidade de expressar ideias e sentimentos. Mantive a intenção de ter os estudantes como protagonistas de sua própria aprendizagem e os convidei a criarem slides com temáticas de interesse pessoal. O resultado foi supreendentemente divertido e profundo, como pode ser visto nas Figuras 3 e 4 que ilustram a produção de duas estudantes.

Os estudantes se mostraram muito felizes em aprender a produzir suas apresentações personalizadas, expressando aspectos lúdicos, como o caso do meme ou temas de relevância social como a violência contra mulheres. Além disso, relataram que foi bom aprender uma forma de produzir conjuntamente porque assim nas palavras deles: “não fica pesado para ninguém na hora de fazer o trabalho”.

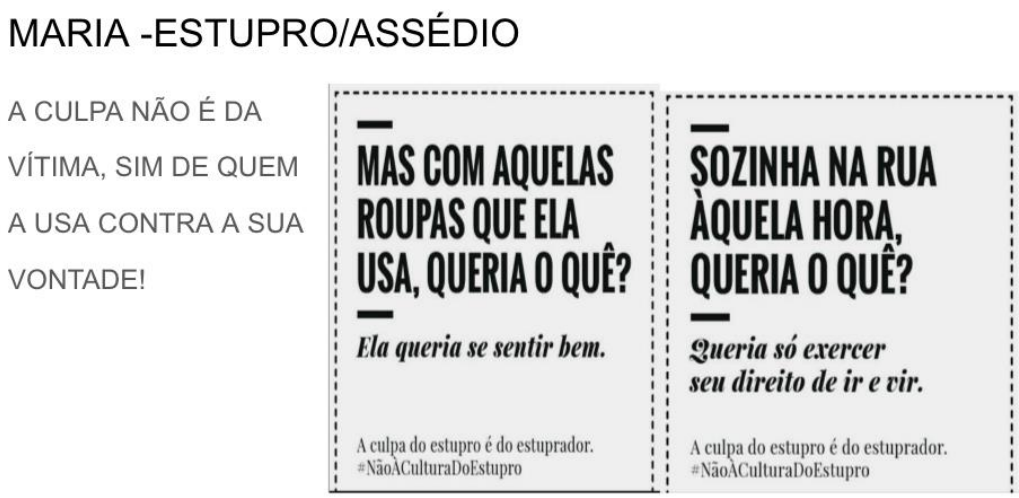


Figura 4. Expressão de temática relevante para a estudante. Fonte: o autor.

Tema: Espaços Reais e Espaços Virtuais 2020

O tema "Espaços Reais e Espaços Virtuais" foi concebido com objetivo de congregar os diferentes sentidos de "SER" no mundo. A ideia inicial era explorar os espaços "reais" (características exploratórias) e os "virtuais" (possibilidade de narrativas ficcionais) e suas relações.

A equipe docente responsável pelo tema era formada por duas professoras de Desenho Geométrico (Profa. Caroline Mendes e Profa. Vânia Gomes), dois professores de Matemática (Prof. Fernando Villar e Prof. Marcos Monte) e uma professora de Geografia (Profa. Vânia Morgado).

As aulas neste tema ocorriam às segundas das 8h30 às 10h00 para as turmas 16A e 17A e das 10h30 às 12h00 para as turmas 16B e 17B. As reuniões de planejamento para este tema eram semanais, sempre às segundas-feiras das 13h às 14h. A integração e partilha de saberes envolvendo os professores era muito grande. No entanto, as atividades eram diferentes para cada série. Apenas em uma aula houve a integração das turmas do 6º e do 7º ano, por ocasião da apresentação da "Agenda 2030" e de um debate sobre sustentabilidade no contexto das Nações Unidas.

Sugeri que começássemos o trabalho com a transição do bidimensional para o tridimensional a partir do livro Planolândia, seguindo uma experiência que utilizei na minha tese de doutorado

> O projeto para a construção do jogo de construção coletiva é apresentada no primeiro encontro e corresponde à história de "Planolândia", escrita por Edwin Bott e narrada pelo personagem "Quadrado", que dividiu a história em duas partes: "Este Mundo" e "Outros Mundos". Na primeira, ele apresenta o seu mundo bidimensional e os habitantes de Planolândia que são figuras geométricas planas. A organização social em Planolândia é hierarquizada devido à quantidade de lados dos habitantes, quanto maior o número de lados maior o seu status social. Este critério também é usado para se estabelecer o grau de inteligência dos indivíduos. Assim, quadrado está

> abaixo de um círculo, mas acima de um triângulo ou uma linha. Nesta hierarquia social, as mulheres são segmentos de reta, portanto estão no nível mais baixo da sociedade, sem lados, sem voz, subjugadas a todo tipo de preconceito. A representação das mulheres pode parecer desrespeitosa para leitores ocidentais do século XXI, mas é tida como uma crítica de Bott à sociedade da época. No topo da hierarquia social está o clero, sob a forma de círculos, formas perfeitas vistas como polígonos regulares com número de lados tendendo ao infinito. Na segunda parte do livro, o Quadrado narra como foi o seu encontro com um ser de Espaçolândia, a esfera, que tenta se apresentar ao Quadrado, mas ao passar por Planolândia o quadrado só consegue ver a interseção da esfera com o plano. Sua visão só muda quando ele é retirado de Planolândia e sua posição é modificada na terceira dimensão. [...] É importante ressaltar que a escolha do texto de Edwin Bott se deve a interdisciplinaridade potencial de Planolândia, dada à abordagem histórico-social da sociedade inglesa a partir da representação por formas geométricas (Marinho, 2014).

Compreendemos que a temática seria interessante, mas para gerar maior interação dos estudantes optamos por utilizar a ferramenta Sketchup[4] para criação de modelos ou maquetes virtuais. Produzimos vídeos tutoriais e orientamos os estudantes a criarem seus próprios modelos. Na primeira atividade eles deveriam construir modelos tridimensionais de casas foram estimulados a usarem muito a criatividade.

Esta foi uma atividade extremamente rica do ponto de vista dos conceitos trabalhados. A perspectiva e os conceitos primitivos de ponto, reta, plano, segmento de reta, foram abordados de forma contextualizada pelas professoras de desenho geométrico. Os professores de matemática puderam trabalhar a diferenciação entre o plano bidimensional e o espaço tridimensional, a representação dos eixos cartesianos, as unidades de medida, dentre outros. A professora de geografia partiu da ideia da casa para explorar o conceito de espaço e território.

Alguns estudantes fizeram o jardim em volta da casa e até mesmo piscinas. Neste caso, utilizaram corretamente a noção de profundidade e posicionaram a piscina abaixo no nível do plano do solo.

A estruturação da abordagem temática partiu da seguinte premissa: relacionar o real e o virtual. Assim, se na primeira atividade proposta foi realizado o registro por meio de desenho de um cômodo da casa de cada estudante que mais lhe agradasse, a última atividade abordou as interações sociais e o cuidado com o meio ambiente e os estudantes construíram uma maquete real e uma maquete virtual com a temática de sustentabilidade.

Neste tema introduzimos as práticas didáticas avaliativas interativas com o uso da plataforma Socrative[5] que permitiu uma proposta de avaliação gamificada. Com ela foi possível modificar a dinâmica clássica de uma avaliação escolar: estudantes em silêncio, apresentando suas respostas de forma individualizada e sem interação para outra mais interativa, com resultados obtidos em tempo real e compartilhados com a turma após a conclusão de cada questão. Ao final da atividade o sistema gera um

[4] https://app.sketchup.com
[5] https://www.socrative.com/

relatório com o percentual de acertos e a indicação das questões nas quais houve maior índice de erros. O que possibilita ao professor planejar atividades de revisão.

Show Names Show Responses Show Results

NAME	SCORE %	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
•••••••	62%	× B	✓ A	✓ B	✓ D	× C	✓ D	× C	✓ C	× B, D	✓ C
•••••••	46%	✓ C	✓ A	✓ B	× A	✓ A	✓ D	× D	✓ C	× C	× A
•••••••	69%	✓ C	✓ A	× A	✓ D	✓ A	✓ D	✓ B	✓ C	× C, D	✓ C
•••••••	46%	✓ C	✓ A	✓ B	× A	× B	✓ D	× C	✓ C	× B, C	✓ C
•••••••	46%	✓ C	✓ A	× D	× A	✓ A	✓ D	✓ B	× D	× B	✓ C
•••••••	54%	✓ C	✓ A	× D	× A	✓ A	✓ D	✓ B	× D	× B, C	✓ C
•••••••	46%	✓ C	× E	✓ B	× B	✓ A	× B	× C	✓ C	× B, C	✓ C
•••••••	77%	✓ C	✓ A	✓ B	× C	× C	✓ D	✓ B	✓ C	✓ B, C, D	✓ C
•••••••	77%	✓ C	✓ A	✓ B	✓ D	✓ A	✓ D	× A	✓ C	× A	✓ C
•••••••	69%	✓ C	✓ A	✓ B	✓ D	× C	✓ D	✓ B	✓ C	× D	✓ C
•••••••	46%	✓ C	✓ A	✓ B	× A	× D	× A	✓ B	✓ C	× C, D	✓ C

Figura 5. Relatório de notas gerado automaticamente no Socrative. Fonte: o autor.

A liberdade pedagógica nos possibilitou reinventar nossas práticas para nos adaptarmos às condições peculiares do ensino remoto emergencial. Antes da pandemia seria difícil imaginar a realização de avaliações escolares à distância. Só que durante este período essa era a única alternativa. Ou fazíamos assim ou não seria possível fazer avaliação alguma. De fato, ao abrirmos a mente para outras possibilidades descobrimos que era possível avaliar o aprendizado de forma processual e ainda mais efetiva do que com os antigos instrumentos presenciais em papel.

Nas aulas presenciais uma prática muito comum era reservar um tempo para os estudantes resolverem questões e depois acompanharem a correção do professor no quadro-negro. Nesse contexto, é difícil ter clareza de como estaria a aprendizagem da turma em relação ao conteúdo apresentado. Era comum perguntar para a turma eles foram, se acertaram tudo ou não, mas os estudantes poderiam mentir por vergonha ou mesmo não compreender que erraram. Muitas vezes eles simplesmente apagavam a resposta errada e copiavam a certa, mas o professor não conseguia aferir quem tinha errado o quê. Para mapear a aprendizagem dos estudantes, normalmente, era agendada uma prova para duas ou três semanas após o conteúdo ter sido apresentado. Aí o professor levava uma semana para corrigir e entregar e só então o estudante teria uma noção se aprendeu ou não. Isso mudou completamente com o uso do Socrative em nossas aulas. Com essa ferramenta não era preciso esperar esse prazo para ter acesso ao resultado. Isso modificou o tempo da escola. Em vez de esperar uma explicação, uma apresentação de exercícios, uma correção, um tempo de estudo, a aplicação da avaliação, a correção da avaliação e a entrega dos resultados, num processo que durava cerca de 4 semanas, foi possível, com uso deste recurso, reduzir todo o processo para apenas uma aula. Essa ferramenta permite, de fato, realizar avaliações

processuais. Em nossa prática avaliativa funcionava assim: apresentávamos uma questão para todos da turma e à medida que eles iam marcando suas respostas o quantitativo de estudantes que responderam era atualizado automaticamente. Assim, o tempo de resolução podia ser ajustado em função do maior ou menor número de estudantes que ainda iriam responder. Quando faltavam poucos estudantes perguntávamos quanto tempo seria necessário para a conclusão e começávamos a contagem regressiva.

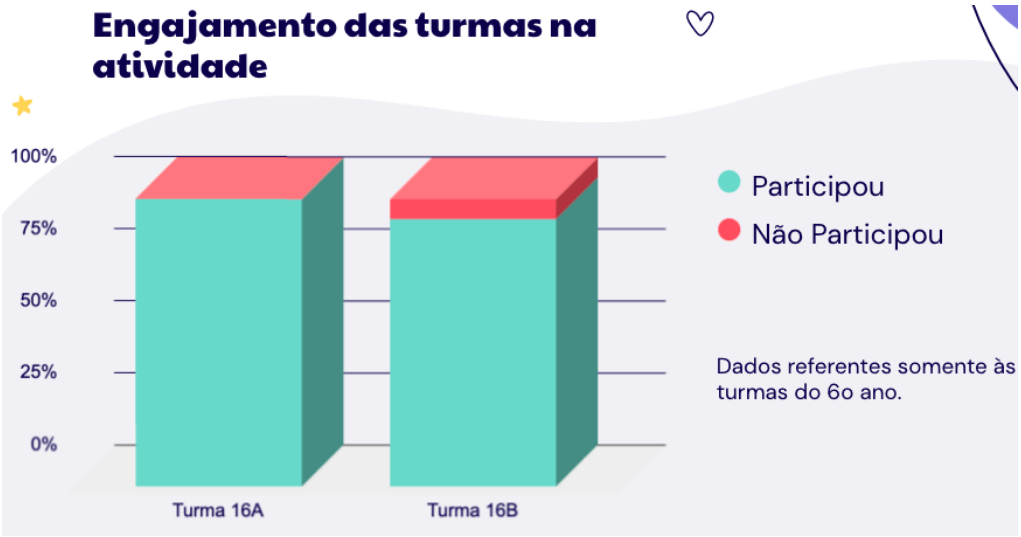


Figura 6. Gráfico de engajamento na 1ª atividade no Socrative. Fonte: o autor.

Na maioria das vezes não era necessário chegar ao final nesta contagem e todos respondiam. Neste momento exibíamos o resultado com a indicação do percentual de escolha de cada alternativa e a resposta correta. Quando o percentual de acertos era pequeno, ou seja, quando muitos estudantes haviam errado, nós aproveitávamos para revisar o conteúdo e fazíamos a correção na hora, aproveitando que a turma estava com a questão em mente. Sem dúvidas essa é a grande vantagem desta prática avaliativa: revisar os conteúdos no momento da avaliação em função da distribuição de erros e acertos. Isso se mostrou ser extremamente eficiente. Uma prática que na estrutura presencial demoraria algumas horas para correção das avaliações e ainda um bom tempo para relembrar os estudantes sobre os conteúdos abordados, passou a ser feito em um ou dois tempos aula. É extremamente poderoso o uso desta inovação nas práticas avaliativas.

A primeira avaliação realizada no tema Espaços Reais e Espaços Virtuais contou com a participação de todos os estudantes da turma 16A e mais de 90% dos estudantes da turma 16, conforme gráfico indicado na Figura 6.

Por outro lado, mais de 90% dos estudantes obtiveram resultado igual ou superior a 50% nesta mesma avaliação. Essa atribuição de nota não tem o intuito de estabelecer qualquer comparação, apenas

serve para ilustrar que dentro dos critérios definidos pelos professores das turmas, o resultado foi muito positivo.

CONCLUSÃO

O ano de 2020 foi muito difícil para toda a humanidade. Muitos de nós perderam familiares ou amigos. De fato, foi uma grande tragédia humanitária que impactou a todos em várias dimensões. Por atuar como professor em uma instituição pública federal tive a oportunidade de atuar com autonomia didática para seguir caminhos criativos com intuito de minimizar uma possível perda na formação dos estudantes. É evidente que ninguém estava preparado para o que aconteceu, mas foi muito bonito perceber a solidariedade entre docentes que compartilharam práticas e dicas tecnológicas nas redes sociais e no Youtube.

No momento mais difícil, houve intensa colaboração docente nas redes sociais e começamos a pensar coletivamente em busca de soluções. Aquela ideia de encontrar uma solução mágica que resolvesse todos os problemas não estava posta. Não havia memória coletiva de algo parecido. Nós, profissionais da educação, passamos a lidar com o desconhecido. Qual foi o grande aprendizado deste período para a educação? Acho que cada um de nós teve um aprendizado diferente, o meu aprendizado foi perceber que era possível sim, fazer um ensino público de qualidade mesmo no formato remoto e emergencial.

Inicialmente muitos docentes se posicionaram contrários ao ensino remoto emergencial porque entendiam que não seria possível fazer ensino remoto de qualidade na educação básica. Com o passar dos dias e com o estudo e dedicação de milhares de docentes em todo o mundo, fomos criando caminhos alvissareiros para a educação frente os desafios que se apresentaram.

As práticas didáticas interativas e avaliativas apresentadas neste capítulo certamente irão acompanhar minha atividade docente após o período de ensino remoto emergencial. O potencial destas ferramentas foi demonstrado por meio das avaliações positivas de estudantes, responsáveis, licenciandos e colegas docentes de diferentes disciplinas.

Foi preciso vencer medos e obstáculos, um a um, para chegar no estágio que estamos hoje. Considero que sou um professor muito melhor do que era antes da pandemia e sei que tenho muito mais a evoluir. Seguirei no caminho do compartilhamento de saberes e da evolução profissional constante, contribuindo com a formação das novas gerações.

Ofereço a escrita deste capítulo à memória das vítimas da pandemia, em particular a três amigos queridos que seguirão sempre em meu coração: Professora Regina Célia Rossado Pereira, Professora Ana

Beatriz Domingues Vicente Ferreira da Silva e Engenheiro Robison Ribeiro. Obrigado pelos momentos de convivência e compartilhamento de amor fraterno.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Garcia, A. G. et al. (2020). Condições de Acesso de Estudantes e Responsáveis ao Blog CAp UFRJ Na Quarentena. Rio de Janeiro. Disponível em: <https://paisdocap.files.wordpress.com/2020/06/relatc3b3rio-final-formulc3a1rio-cap-na-quarentena.pdf>. Acesso em: 11 dez. 2020.

Marinho, F. C. V. (2014). Saberes Docentes para Promoção de Aprendizagem em Ciências e Matemática a partir do Desenvolvimento de Jogos Digitais. 358 f. Tese (Doutorado) – Núcleo de Tecnologia Educacional para Saúde, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2014.

Universidade Federal do Rio de Janeiro (2020a). Conselho Diretor do Colégio de Aplicação. Resolução nº 01/2020, de 23 de junho de 2020. Dispõe sobre diretrizes para atividades pedagógicas não presenciais provisórias e transitórias para a Educação Básica na UFRJ durante o período de distanciamento social e dá outras providências. Rio de Janeiro: Conselho Diretor. Disponível em: https://capnaquarentena.wixsite.com/capufrj/notas-publicadas. Acesso em: 01 ago. 2021

Universidade Federal do Rio de Janeiro (2020b). Conselho Diretor do Colégio de Aplicação. Resolução nº 02/2020, de 01 de setembro de 2020. Dispõe sobre Reorganização do Calendário Letivo 2020 em complemento a resolução 01/2020 do Conselho Diretor do Colégio de Aplicação da UFRJ durante o período de distanciamento social e dá outras providências. Rio de Janeiro: Conselho Diretor. Disponível em: https://capnaquarentena.wixsite.com/capufrj/notas-publicadas. Acesso em: 01 ago. 2021

Universidade Federal do Rio de Janeiro (2020c). Conselho Diretor do Colégio de Aplicação. Resolução nº 03/2020, de 08 de setembro de 2020. Dispõe sobre as diretrizes internas para o trabalho de formação inicial docente - estágio e atividades complementares, em complemento à Resolução 02/2020 do Conselho Diretor do Colégio de Aplicação da UFRJ durante o período de distanciamento social. Rio de Janeiro: Conselho Diretor, Disponível em: https://capnaquarentena.wixsite.com/capufrj/notas-publicadas. Acesso em: 01 ago. 2021

Capítulo III

Conceitos elementares de Geometrias não euclidianas na Escola Básica: Por quê? Para quê?

Recebido em: 30/06/2021
Aceito em: 31/07/2021
10.46420/9786581460372cap3

Ana Maria Martensen Roland Kaleff[1]

INTRODUÇÃO: UM QUESTIONAMENTO

Com o presente texto, esperamos responder a algumas questões que acreditamos pertinentes a esse tempo da pandemia provocada pelo novo coronavírus, bem como para o futuro, para quando o sistema escolar estiver menos estressado devido à emergência de tantas práticas educacionais inovadoras relacionadas aos ensinos híbrido e remoto. O conjunto de questões relacionadas às geometrias não euclidianas (GNE) apresentado a seguir, pode levar o leitor(a) a pensar que não tenha ligação com essa tão inusitada vivência compartilhada com o restante do mundo; no entanto, mostraremos como tudo isso pode ser interligado.

Todos sabemos que a partir de 2021, os resultados das Ciências e as ações fundamentadas no pensamento científico para o enfrentamento da pandemia têm sido muito questionadas, então, por que nos preocuparmos especificamente com as GNE? Será que, o conhecimento de como tais geometrias surgiram pode nos ajudar a refletir melhor sobre as ações executadas no mundo científico de nossos dias? Mas, será que sabemos o que são as GNE e como elas surgiram? Conhecemos exemplos de GNE? Afinal, devemos escrever geometrias não-euclidianas ou geometrias não euclidianas (com ou sem hífen)?

Em nosso entendimento e como docentes, talvez, não estejamos conscientes de que as questões anteriores sobre as geometrias são muito importantes para o ensino de Matemática e para o entendimento do mundo científico atual; portanto, cabem mais perguntas: será que as GNE ainda têm algum significado para o ensino, nos dias que virão e nesses da pandemia?

Olhando para o futuro de nossas escolas, podemos nos perguntar: para que se pensar em colocar uma introdução às GNE no Ensino Médio? Será que as GNE podem ser relacionadas à atual Base Nacional Comum Curricular (BNCC)? Existem exemplos didáticos de GNE para o Ensino Básico? Os atuais docentes estão preparados para ensiná-las?

[1] Universidade Federal Fluminense
Autor de correspondência: anakaleff@id.uff.br

Iniciamos o presente texto buscando responder ao "por quê?" do seu título, apresentamos como entendemos a criação de novos conhecimentos científicos e as lógicas envolvidas com as ações relacionadas ao pensamento científico que os embasam, à Educação e à Matemática. Para compreendermos tal criação, iniciamos com uma breve introdução histórica à geometria euclidiana (GE) e a dois problemas encontrados no seu bojo; em seguida, contextualizamos como, nos séculos XIX e XX, surgiram as GNE e as consequências desse surgimento para as Ciências.

Para responder ao "para quê?" se introduzir as GNE no Ensino Médio, analisamos como o pensamento científico e o ensino das representações matemáticas são apresentados na BNCC, bem como estes se interligam em relação à pandemia; elencamos alguns resultados de pesquisas realizadas por nós, no âmbito da formação de professores de Matemática e do livro didático, e finalizamos com considerações sobre exemplos de GNE que podem ser utilizados na escola básica.

EDUCAÇÃO, MATEMÁTICA, O PENSAMENTO CIENTÍFICO E SUAS LÓGICAS: POR QUÊ?

A introdução de aspectos do pensamento científico e de práticas experimentais das Ciências no ensino têm início no final do século XIX, em conjunto com a adoção de algumas atividades laboratoriais na Educação.

Ao colocar a prática laboratorial em foco, o educador norte-americano John Dewey (1859-1952) influenciou outros educadores e formadores de políticas educacionais de várias partes do mundo; no Brasil, inspirou o Movimento Escola Nova, e principalmente o professor Anísio Teixeira (1900-1971), um dos principais idealizadores desse Movimento.

Teixeira teve seu mestrado orientado por Dewey e se empenhou na organização e administração do sistema público de ensino brasileiro e na propagação da importância da interligação entre aspectos educacionais científicos e sociais. Conforme depreendemos de Teixeira (1968), este considerava as atividades experimentais fundamentais, tanto como fomento ao pensamento científico para o entendimento da natureza e do ambiente físico, quanto do meio social em que vivemos. Teixeira tomava as atividades experimentais como uma excelente prática escolar para promover a democracia e o bem-estar social.

No entanto, segundo Lefebvre (1991), os procedimentos de ensino científico e de sua estruturação pedagógica não são imediatos para serem integrados ao sistema educacional. Tais procedimentos devem ser elaborados de modo a possibilitar o exercício de aquisição de processos lógicos de pensamento específicos das lógicas presentes no dinamismo da realidade, os quais só irão se realizar se respeitadas as especificidades próprias de cada ramo do conhecimento e de cada ciência. Sob essas

considerações, como apresentaremos mais adiante, é necessário que reconheçamos a ciência Matemática como um conhecimento humano, criado por homens e mulheres, tanto para se entender e representar a realidade como criação teórica sistêmica, idealizada e em contínuo progresso.

Ainda segundo Lefebvre (1991), o conhecimento humano envolve duas maneiras de se constituir, seguindo duas vertentes lógicas: a primeira, chamada de "lógica dialética", é a que rege e interliga as leis mais gerais do universo, leis comuns a todos os aspectos da realidade, desde os de natureza física até os mentais, passando pela natureza viva e pela sociedade. Essa vertente exige um constante reexame das teorias elaboradas pelos estudiosos e a crítica das suas práticas. No caso da Matemática, é essa a lógica que rege os processos mentais da criação e descoberta não formais de novos conteúdos matemáticos ligados à intuição, à percepção por meio dos sentidos, à visualização, à criatividade etc. A segunda vertente é a da "lógica formal" que rege intrinsecamente os processos formais internos à própria Matemática e ligados às linguagens matemáticas de representação (algébrica, aritmética, gráfica por meio de desenhos geométricos etc.).

Enfatizamos que existe uma grande distinção quanto ao funcionamento do pensamento em relação a essas duas lógicas, quando se trata da negação de uma ideia ou conceito: a lógica dialética parte do "princípio da contradição", para o qual um objeto ou fenômeno (do mundo material, real ou mental) está em constante movimento de (re) ou (i)novação quando submetido a uma dupla negação do entendimento da sua forma e do seu conteúdo, ou seja, a dupla negação potencializa o surgimento de algo novo (como objeto ou fenômeno). Por sua vez, a lógica formal é regida pelo "princípio da não contradição", no qual, uma ideia ou conceito matemático, quando submetido a uma dupla negação, tem como resultado a mesma ideia ou conceito.

É importante se notar que, para a lógica dialética, a dupla negação de uma ideia ou conceito pode se dar tanto em relação à forma com que este se apresenta (portanto, a negação é em relação a uma de suas representações) quanto em uma negação do próprio conteúdo. Porém, na lógica formal, considerando-se que os objetos matemáticos são ideais e abstratos, segundo Duval (2003), os conceitos e propriedades matemáticas necessitam sempre de uma forma de registro de representação linguístico para a comunicação do conteúdo idealizado. É essa forma de registro de representação que sofre a dupla negação (em linguagem proposicional natural ou simbólica, e em uma linguagem gráfica).

Quadro 1. As lógicas do conhecimento e a dupla negação. Fonte: a autora.

Seja um OBJETO P (conteúdo) e consideremos RP uma forma de registro de representação do Objeto P
Princípio da contradição da lógica dialética: ~~ OBJETO P <-> (~ OBJETO P e ~ RP) -> OBJETO NOVO. Princípio da não-contradição da lógica formal: (RP <-> ~~RP) ou seja (RP -> ~ RP -> ~~ RP -> RP). Lembrando- se que o OBJETO ideal matemático P (conteúdo mental) é sempre representado por RP em um registro de representação.

Segundo Duarte (1987), no âmbito educacional, o exercício dessas duas lógicas permite a interligação entre o pensamento científico e as mudanças na realidade social. Portanto, ao orientarmos os procedimentos de ensino para o exercício das lógicas de interpretação, tanto a do conhecimento matemático (pensamento matemático e científico) como o relacionado à realidade, estaremos contribuindo para a formação de atitudes mentais do estudante que o levem a uma participação consciente nos processos de transformação social. Cabe acrescentar que, do grande conjunto de práticas próprias às Ciências, a investigação é aquela que traz diversos elementos passíveis de extrapolar as Ciências da natureza e a Matemática para todas as outras áreas do conhecimento, levando à descoberta de novas situações sociais e da realidade (das Ciências naturais ou da Matemática).

No que se segue, buscaremos interligar o que foi considerado até aqui com as GNE, para tanto, relacionaremos as duas lógicas do conhecimento, o pensamento científico e as representações com o surgimento das geometrias não euclidianas.

UMA REVISÃO DAS GEOMETRIAS: POR QUÊ?

Iniciamos essa revisão das geometrias, lembrando a importância histórica da chamada geometria euclidiana (GE) para o desenvolvimento da Matemática.

A geometria euclidiana

Foi por volta do século VI a.C. e a partir de Tales de Mileto (cerca de 624 - 546 a.C.), que os conhecimentos empíricos geométricos e relacionados ao entendimento do mundo à nossa volta

começaram a se transformar em um sistema de representações de ideias interligadas a especulações abstratas, baseadas em raciocínios lógico-dedutivos. Esse movimento transformador atingiu o seu ápice na época de Euclides, que viveu em Alexandria, no Egito, durante o reinado do rei Ptolomeu I (306-283 a.C.).

Foi Euclides quem compilou, em forma estruturada, os conhecimentos matemáticos consensuais até então estabelecidos, reunindo-os em 13 livros denominados "Os Elementos".

Esta estruturação, escrita na forma de regras enunciadas por proposições na linguagem natural, consistia em definições (vinte e três afirmações apresentadas sem quaisquer comentários); axiomas (cinco afirmações consideradas verdades estabelecidas por si mesmas) e postulados (cinco afirmações consideradas como proposições geométricas). A partir da combinação dessas proposições por meio de leis da lógica clássica, Euclides estabeleceu relações consideradas verdadeiras e denominadas de "teoremas", cuja veracidade lógica podia ser constatada por meio de sequências de raciocínio dedutivo, ou seja, da verificação da veracidade de cada passo de uma sequência de inferências lógicas. Essa estruturação das relações foi chamada de "modelo de sistema axiomático" e se constitui na primeira concepção teórica da Matemática como uma apresentação estruturada, por meio de um sistema de regras. Como veremos logo a seguir, tal maneira de se estruturar regras também influenciou a longa história da evolução do conhecimento científico nos países ocidentais, pois outros ramos das Ciências foram estabelecidos da mesma forma de um modelo de sistema axiomático.

Segundo Carvalho (1994), o Livro I de "Os Elementos" se inicia com a lista de definições, na qual, por exemplo, a primeira e a segunda afirmam que: "um ponto é aquilo que não tem partes" e "uma linha é uma extensão sem largura". O objetivo dessas definições é fornecer ao leitor uma base para o entendimento dos termos matemáticos.

Quadro 2. "Trecho de "Os Elementos". Fonte: Carvalho (1994).

Os cinco primeiros postulados.
1º - Pede-se, como coisa possível que se tire, de um ponto qualquer para outro ponto qualquer, uma linha reta; 2º - Que uma linha reta determinada continua em direção de si mesma, até onde seja necessário; 3º - Que com qualquer centro e qualquer intervalo se descreve um círculo; 4º - Todos os ângulos retos são iguais;

5º - Se uma linha reta, encontrando-se com outras duas retas, fizer ângulos internos, da mesma parte, menores que dois retos, estas duas retas, produzidas ao infinito, concorrerão para a mesma parte dos ditos ângulos internos.

Considerando que "postular" significa "pedir para aceitar", Euclides "pede" ao seu leitor para aceitar como verdadeiras as afirmações geométricas que formula como "postulados". Os três primeiros são sobre a construção geométrica, sendo que o 1º e o 3º Postulados fornecem os instrumentos básicos de desenho de toda GE, ou seja, a régua não graduada e o compasso.

A partir de 1796, uma versão do 5º Postulado de Euclides, tornou-se muito conhecida devido aos estudos do matemático e físico John Playfair (1748-1819). Este demonstrou a equivalência lógica dessa afirmação com aquela apresentada originalmente em "Os Elementos". Essa nova versão do postulado, por ser bem mais simples e de fácil compreensão do que a original, passou a ser considerada no ensino e apresentada na maioria dos livros didáticos.

Quadro 3. Versão de John Playfair – 5º Postulado da GE. Fonte: Carvalho (1994, p.18).

Versão difundida nos livros didáticos atuais.
Por um ponto do plano, não pertencente a uma determinada reta, passa uma e somente uma reta paralela à reta considerada.

Para Mlodinov (2004), a GE pode ser considerada como uma janela para o entendimento do mundo a nossa volta, pois até o século XIX, ela foi utilizada e muito bem considerada pelos estudiosos para descrever as características do nosso universo físico; mas ela também influenciou muitos matemáticos, filósofos e lógicos, como Baruch de Espinosa (1632-1677), Georg W. F. Hegel (1770 – 1831), Bertrand A. W. Russell (1872-1970), entre outros. Como veremos a seguir, apesar dos muitos questionamentos sobre a veracidade de algumas de suas regras, levantados até pelo próprio Euclides e por vários matemáticos, suas verdades absolutas perduraram até o século XIX.

Com o passar do tempo, a GE apresentou alguns problemas**,** os quais estão no cerne de uma longa discussão que envolve a evolução do conhecimento científico ocidental. Um desses está relacionado à maneira de ela descrever algumas formas e padrões encontrados na natureza; pois, a GE descreve bem os padrões de regularidade dos objetos, porém, o mesmo não ocorre se os padrões forem repetitivos, irregulares e fragmentados. Por exemplo, um tronco de uma árvore pode ser representado como um

cilindro posicionado verticalmente ao plano do solo; no entanto, a GE não consegue descrever de uma maneira satisfatória as rugosidades irregulares apresentadas na casca que recobre a superfície do tronco.

Um outro problema no bojo da GE e, aparentemente, até considerado por Euclides, foi quanto à falta de clareza para o entendimento do Quinto postulado. Muitos estudiosos se questionaram se a afirmação não seria uma verdade (teorema) decorrente dos outros quatro postulados. Durante quase 2100 anos, muitos matemáticos tentaram sem sucesso demonstrar essa relação e, como consequência, como trataremos a seguir, surgiu uma nova maneira de se encarar e considerar os conhecimentos geométricos.

SECULO XIX: SURGIMENTO DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

Na primeira metade do século XIX, vários matemáticos como, Nicolai Lobachevsky (1792-1856) em 1829; Janos Bolyai (1802-1860), em 1832; Georg Bernhard Riemann (1826-1866), em 1854 e, posteriormente, Eugenio Beltrami (1835-1900), Jules-Henri Poincaré (1854-1912) e Felix Klein (1849-1925), concluíram que a pretedida demonstração do Quinto Postulado como um teorema não era possível. Segundo Blumenthal, (1961), tal discussão é anterior às considerações teóricas que propiciaram o surgimento de outros sistemas geométricos e seus modelos, pois o matemático alemão Karl Friedrich Gauss (1777-1855), em carta ao matemático Franz A. Taurinus (1794-1874), já em 1824, afirmava que havia estabelecido e desenvolvido um outro sistema axiomático curioso e muito diferente do euclidiano. Todavia, Gauss, considerado por muitos estudiosos como o maior de todos os matemáticos que viveram no século XIX, - se não o maior de todos os tempos -, nunca deixou que fossem publicados quaisquer resultados a respeito dessas suas descobertas tão inovadoras e desestruturadoras do estabelecido matematicamente há tantos séculos

Foram esses estudiosos que nos permitem, nos dias de hoje, olhar o conhecimento geométrico para além da janela aberta pelos paradigmas propostos por Euclides na GE

Antes de elencarmos alguns dos modelos introdutórios às GNE, enfatizamos que, surgiram grandes dificuldades quando os estudiosos tentaram passar das concepções euclidianas para as abstrações não-euclidianas, pois as imagens visuais, percebidas do mundo real, sempre influenciaram a representação dos conceitos geométricos. Os modelos não-euclidianos foram os primeiros conjuntos de regras matemáticas passíveis de interpretações e representações gráficas, na forma de desenhos, que não correspondiam ao esperado pela percepção visual. Portanto, modelos que fugiam (e realmente fogem!) ao conhecimento gerado pelo senso comum.

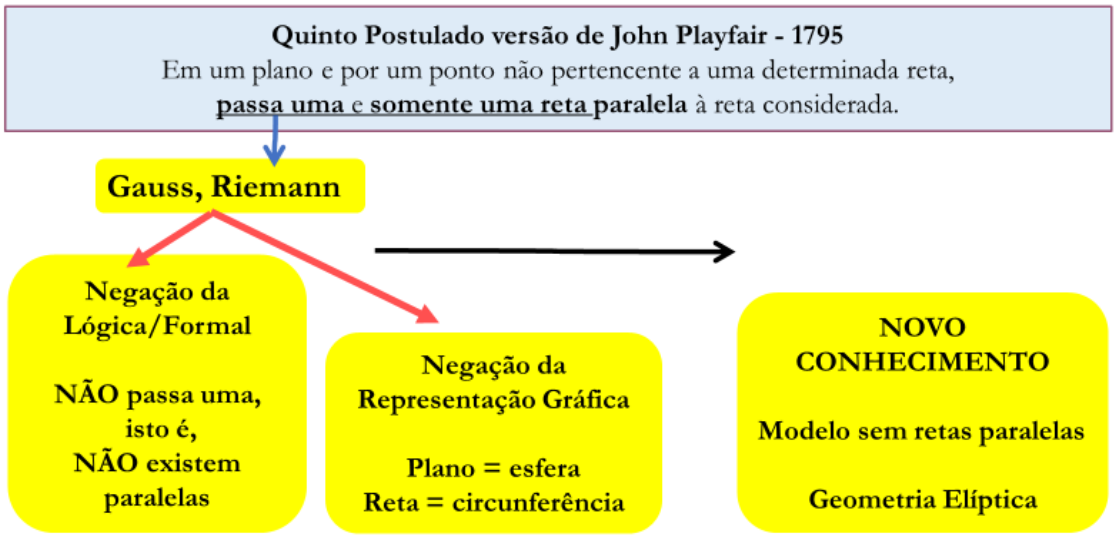
Quem não se lembra da imagem de uma reta linear, contínua e paralela ao plano do chão, quando ouve o termo "reta"? Quem não imagina dois segmentos retilíneos equidistantes quando ouve a expressão "retas paralelas"? A quebra com essa imagem mental de retas equidistantes foi conseguida quando os

matemáticos, pioneiros estudiosos desse tema, passaram a considerar "retas paralelas como aquelas que não têm pontos em comum", ou seja, "retas paralelas são conjuntos de pontos de uma mesma superfície que não se interceptam".

Como apresentamos nos Quadros 4 e 5, a negação do Quinto Postulado teve como consequência a descoberta da "geometria elíptica", na qual não existem retas paralelas e das "geometrias hiperbólicas", em cujos modelos existem mais de uma paralela a uma determinada reta. Portanto, ocorreu o surgimento de uma variedade de sistemas axiomáticos dedutivos alternativos ao euclidiano, conhecidos como "geometrias não-euclidianas (GNE)".

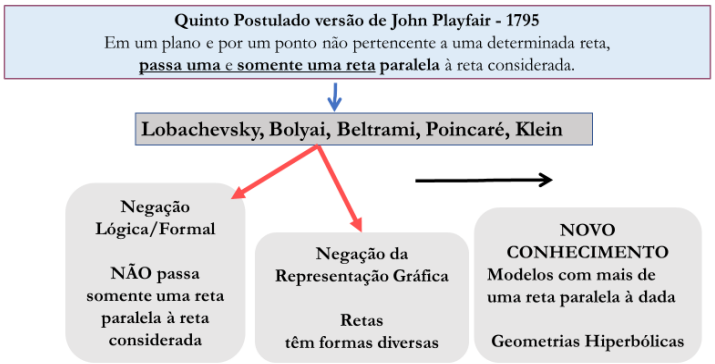
Quadro 4. Criação de novos conhecimentos geométricos. Fonte: a autora.

Análise da Dupla Negação do Quinto Postulado: Negação de "Passa uma"



Quadro 5. Criação de novos conhecimentos geométricos Fonte: a autora.

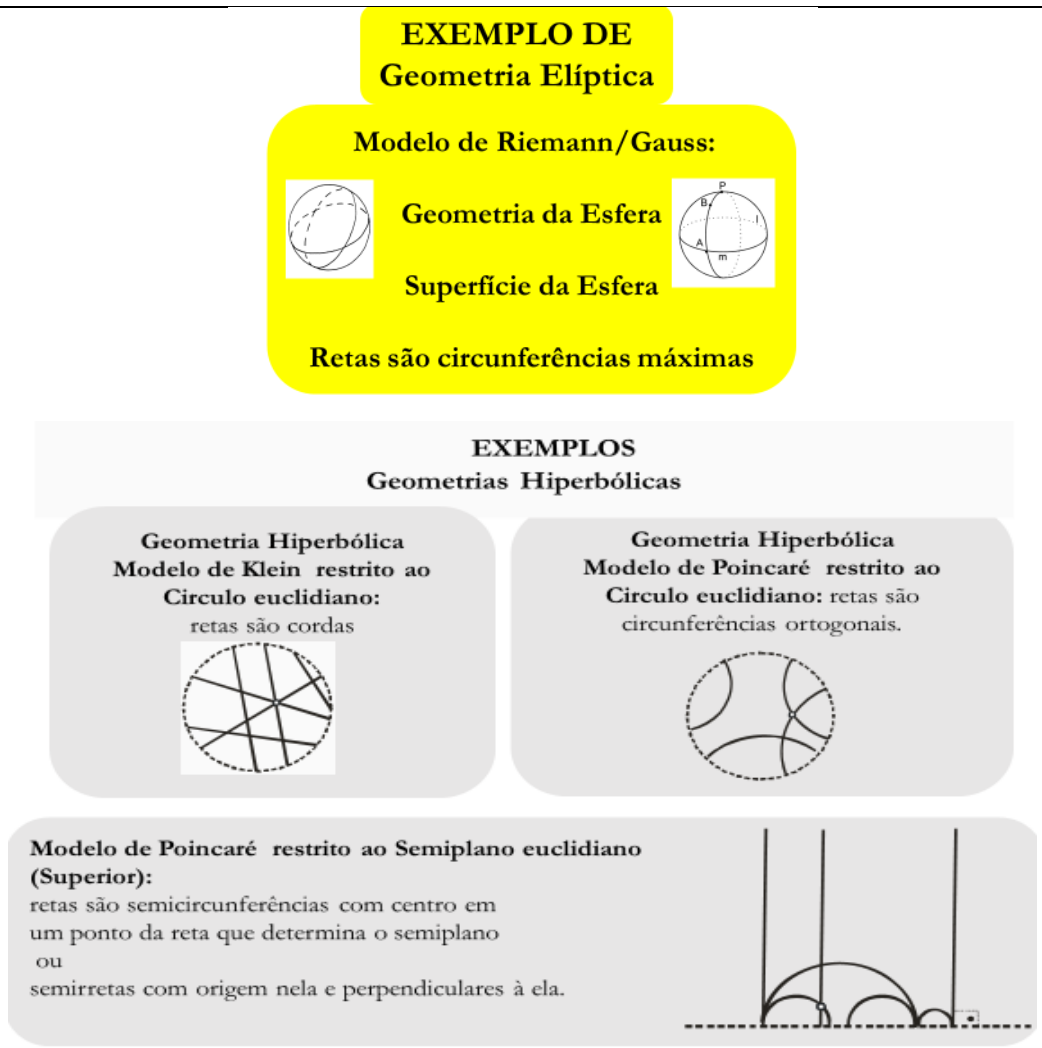
Análise da Dupla Negação do Quinto Postulado: Negação de "Passa somente uma"



Ressaltamos que a criação das GNE representa um marco histórico no desenvolvimento das Ciências, pois é, segundo Gans (1973), "nada menos que uma revolução na Geometria. Com o passar do tempo foi provado que os efeitos da descoberta não foram menos profundos em outros ramos da Matemática, da Física e da Filosofia".

No Quadro 6, apresentamos alguns exemplos das GNE pioneiras.

Quadro 6. Exemplos de geometrias não-euclidianas. Fonte: a autora.

Geometrias elíptica e hiperbólicas


SECULO XX: OUTRAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS E CONSEQUÊNCIAS DO SURGIMENTO DAS GEOMETRIAS

Foi através das novas geometrias que os cientistas iniciaram a busca por explicar o mundo físico dos nossos dias, por meio de ferramentas teóricas modernas, por exemplo, as ligadas à Teoria da Relatividade. Foi essa grande abertura científica e filosófica, trazida pelo surgimento das GNE às ideias euclidianas e às de Newton relacionadas à Física, que fez os conceitos científicos anteriores ao século XIX serem considerados insuficientes para a representação dos fenômenos físicos.

No final do século XIX, também se tornaram conhecidos alguns sistemas axiomáticos interessantes, criados a partir de conjuntos finitos de pontos e com poucos elementos arbitrários. Os modelos desses sistemas negam o Segundo Postulado de Euclides, aquele que solicita se considerar poder prolongar sempre uma reta, até onde seja necessário. Em alguns desses modelos, agrupamentos com exatamente três elementos distintos são tratados como "retas" ou "linhas", cujas relações são estabelecidas por meio de poucos axiomas, que negam esse postulado, ou seja, não permitem que sempre se trace uma linha reta contínua, na direção de si mesma, até onde se queira. Segundo Franco de Oliveira (1995), esse tipo particular de constituição teórica possui as características do que se conhece nos dias de hoje como "sistema axiomático de geometria finita". Ainda em 1898, Gino Fano (1871 - 1952) estabeleceu um modelo dessas geometrias com 7 pontos e um outro, devido ao matemático John Wesley Young (1879 - 1932), surgiu em 1906, ambos os modelos podem ser encontrados em Kaleff (2004). O estudo desses sistemas finitos é fundamental para vários ramos da Matemática surgidos desde então, tais como Matemática Discreta, Análise Combinatória, Estatística e Teoria dos Grafos.

Após as descobertas geométricas aqui relatadas, passaram-se muitos anos para que outros conceitos surgissem e permitissem descrever melhor ainda os objetos da nossa realidade física, ou seja, descrever aqueles objetos naturais com formas repetitivas irregulares, tortuosas ou salientes. Em meados do século XX, segundo Barbosa (2007), o matemático Benoit Mandelbrot (1924 - 2010) criou o conceito denominado "fractal". Este termo vem de duas palavras latinas *fractus* e *frangere* que significam "quebrar" e "partido", e refere-se às características naturais dos objetos que parecem fragmentados, irregulares e partidos, cuja dimensão pode ser expressa por um número não inteiro, fugindo da noção de duas e três dimensões referentes aos objetos do plano e do espaço euclidianos. Desde então, tal sistema axiomático que trata mais propriamente dos objetos naturais é denominado de "geometria fractal" e se consolidou como uma nova área da Matemática devido ao desenvolvimento dos computadores e de novas teorias advindas da Física, Biologia, Astronomia e outras Ciências.

AS GNE E A PANDEMIA, BNCC E O FUTURO DE NOSSAS ESCOLAS: PARA QUE?

Cabe ressaltar que, o surgimento das novas geometrias, as quais, a partir de agora, indicaremos por "geometrias não euclidianas" (sem hífen!) e, que negam algum dos axiomas da GE, trouxe à luz uma importante característica da própria Matemática que, até o século XIX era pouco percebida e a qual já nos referimos anteriormente: a de que Matemática é um sistema de conhecimentos construídos por homens e mulheres através da história, sujeito a reformulações e transformações, cujas afirmações, frente a determinados questionamentos, geram revisões de seus próprios conceitos, acarretando novas teorias matemáticas. Portanto, em sua origem, foram os processos de negação do Quinto Postulado Euclidiano que deram origem à criação de novas teorias matemáticas e ao grande desenvolvimento da Matemática do século XX, o que também se refletiu em outras Ciências e no desenvolvimento do pensamento científico.

Pelo apresentado, podemos, de uma maneira resumida, afirmar que, até os dias de hoje, a dupla negação de um fato ou conceito geométrico tem balizado a maneira de se criar um novo conceito, nos demais ramos do conhecimento científico e social.

Olhando para o momento tão inusitado da pandemia em que hoje vivemos, precisamos considerar que os cientistas, voltados para as Ciências biológicas, precisam criar vacinas que evitem a COVID-19 e, para tanto, entendam o que seja o seu transmissor, o vírus Sars-Cov-2, e sua capacidade de propagação, regeneração e transmutação em novas cepas. Para tanto, os cientistas necessitam rever todo o conhecimento científico sobre criação de vacinas estabelecido até 2020. Portanto, cabe perguntar: não estaríamos vivenciando um momento em que deva ocorrer o surgimento de algo novo (a vacina) a partir de uma dupla negação do conhecimento já estabelecido?

Pelo que temos conhecimento, podemos dizer resumidamente e de uma maneira quase simplória, que os cientistas necessitam criar meios (uma vacina) para "negar (evitar)" a propagação do novo coronavírus (Sars-Cov-2) e também "negar o tempo exigido" para a confecção e testagem desses meios (uma vacina que negue o vírus e que negue a disseminação de novas cepas).

Sob essas considerações, olhando para o futuro, a importância de introduzirmos conceitos elementares das GNE, até mesmo na escola e, principalmente, no âmbito da licenciatura em Matemática, reside no fato dessas teorias possibilitarem um melhor entendimento das Ciências e do nosso mundo físico, por meio da quebra de regras, verdades e paradigmas científicos previamente estabelecidos.

No que tange o ensino da Matemática, e como há muito tempo temos pontuado (ver em Kaleff 2007, 2016), a introdução de conceitos elementares das GNE permite a quebra de padrões visuais, trazendo o visualmente inesperado para a sala de aula e a oportunidade da criação de novas imagens mentais e conceitos matemáticos. Ou seja, a introdução precoce às GNE possibilita trazer para jovens adolescentes, novos conceitos científicos por meio de padrões renovados de desenho, que permitem

relacioná-los a expressões e palavras com outros significados, além daqueles pertencentes ao senso comum euclidiano, unindo características aparentemente antagônicas, quando apresentadas em diferentes linguagens e em outros registros gráficos de representação matemática.

Cumpre citar Fasheh (1998), que comunga com nossas ponderações e introduziu conceitos das GNE em uma pesquisa envolvendo adolescentes palestinos, na escola básica. Para esse autor, a potencialidade da introdução ao ensino dedutivo, por meio de geometrias não euclidianas, reside em que estas permitem objetivar a percepção de diferenças e de regularidades entre estruturas axiomáticas diversas, bem como a conscientização de conceitos desenvolvidos com muitos preconceitos e um melhor entendimento da própria sistematização da ciência Matemática. Tais percepções são necessárias e devem ser realizadas no âmbito escolar, quando se visa à evolução científica e social de um país em desenvolvimento, nas palavras de Fasheh (1998):

> Os estudantes aprendem a ver similaridades entre coisas que não parecem similares à primeira vista. A descoberta de que dois diagramas, por exemplo, podem ser considerados como modelos de um mesmo sistema abstrato (através da troca dos significados de 'linha' e 'ponto' nos axiomas dos sistemas) foi sempre chocante e interessante para os alunos e uma fonte de discussão séria, profunda e envolvente, que normalmente durava várias aulas. Em minha experiência, esta espécie de interação quebrou muitos preconceitos e formas rígidas de pensar. [...] acabei por acreditar que o pensamento dedutivo pode ser usado com muita eficiência para criar novas atitudes e percepções no que se refere ao conhecimento em geral e à Matemática em particular - percepções e atitudes que são bastante necessárias em nossa sociedade e cultura e, imagino também, em outras sociedades de países de Terceiro Mundo. Primeiro os alunos aprendem que a Matemática é criada pelo homem. Eles aprendem que os axiomas não são um presente de Deus ou um presente da Natureza, mas em vez disso, são regras e procedimentos que evoluem com o tempo, através de um processo longo e difícil. Eles aprendem que não somente as regras básicas evoluem, mas também como evolui o sentido das palavras e conceitos (tais como idiomas). [...)] os estudantes aprendem um modelo intelectual ou estrutura - o modelo axiomático - que está faltando em nossa cultura. [...] os estudantes são ajudados a verem alternativas e o sentido de "verdade relativa". Eles aprendem que os axiomas podem ser modificados, parcial ou totalmente, para produzir novos sistemas e modelos. (...) os estudantes são ajudados a relacionar um certo evento ou fenômeno do mundo real com vários modelos abstratos possíveis; e vice-versa, um sistema abstrato pode ter vinte modelos ou aplicações "concretas" no mundo real.

No entanto, como mostramos em uma pesquisa realizada por nós e apresentada em Kaleff (2004, 2007), as imagens euclidianas surgem e impregnam a nossa mente de maneira espontânea. Interferir e romper com tais procedimentos mentais tão poderosos e comuns a todos, professores e alunos, tem sido e continuará a ser um árduo trabalho escolar para o desenvolvimento do pensamento científico, na medida em que precisamos levar em conta as considerações anteriores, as quais também encontram reflexos na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A BNCC enfatiza o papel primordial do pensamento científico, crítico e criativo, e o seu desenvolvimento, admitindo que esta maneira de pensar compõe uma das dez Competências que devem ser estimuladas no Ensino Básico. Explicitamente, a Segunda Competência a ser adquirida pelo aluno seria:

> *E*xercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das Ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (Brasil, 2019).

Por outro lado, a BNCC do Ensino Médio enfatiza o papel das diferentes linguagens (algébrica, vetorial, aritmética, gráfica em traçados de desenhos, tabelas etc.) e representações em Matemática para a compreensão de fatos, de ideias e de conceitos:

> É em especial na área de Matemática que podemos verificar de forma inequívoca a importância das representações para a compreensão de fatos, de ideias e de conceitos, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas. Na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, resolução e comunicação de resultados de uma atividade. Por sua vez, o trânsito entre os diversos registros de representação pode favorecer que os estudantes tenham maior flexibilidade e fluidez na área e, ainda, promover o desenvolvimento do raciocínio. (Brasil, 2019).

Apesar dessas indicações da BNCC e como temos apontado, por exemplo, em Kaleff (2007), no Brasil, a grande maioria dos cursos de licenciatura e de formação continuada de professores de Matemática, muitas vezes não apresenta um bom ensino das geometrias (GE e GNE). Nos procedimentos didáticos, não consideram especificamente a importância do papel das imagens mentais na elaboração dos conceitos dessa área e também deixam de lado os registros de representação envolvidos com os mesmos. Em tais práticas didáticas, geralmente, não são consideradas as diferentes representações linguísticas na elaboração de um conceito matemático, nem levam o licenciando a realizar análises e comparações de sistemas axiomáticos diversos, com outras regras e interpretações além da euclidiana. Ainda quando são trabalhados conteúdos não-euclidianos da geometria elíptica ou das hiperbólicas, o foco dessas práticas é somente nos procedimentos dedutivos relacionados à demonstração de teoremas.

Pesquisas realizadas por nós, ao longo de duas décadas no âmbito da formação de professores de Matemática, tanto em cursos de especialização presencial quanto no ensino à distância, nos permitem fazer uma afirmação pouco animadora e preocupante: menos de 40% dos profissionais, com cerca de 2 a 10 anos de formados, tiveram alguma introdução às GNE no seu curso de graduação. Sendo que esse índice era um pouco melhor no início da década de 2000, como pode ser visto em Kaleff (2007, 2021).

Durante essas duas últimas décadas, também pesquisamos como a principal ferramenta didática do professor, ou seja, os livros didáticos, tratam o tema GNE. Observamos que os modelos finitos de Young e Fano podem ser encontrados em livros universitários, principalmente entre os autores brasileiros pioneiros dos tratamentos axiomáticos que modificam os axiomas euclidianos, como Barbosa (2005); no entanto, isso não acontece nos livros para o Ensino Médio. É preciso ressaltar que, em Portugal, as geometrias finitas apareceram nos livros didáticos para esse nível de ensino já no final da década de 1990 (Jorge et al., 1999). Por sua vez, em Andrade (2013) encontramos uma interessante introdução à geometria hiperbólica com o modelo de Poincaré, que antes de entrar em apresentação dedutivas desse

modelo de GNE, apresenta uma instigante leitura iniciando com o relato de fatos históricos, um resumo das ideias e revisão de Riemann da GE, como ainda os principais resultados que ligam a GE às geometrias hiperbólicas estabelecendo as semelhanças entre as duas.

Por outro lado, um modelo interessante de GNE foi introduzido em 2002, no Brasil, por Antônio J. Lopes Bigode, que pode ser visto em Bigode (2002) com o nome de "geometria do taxista", em livro didático para a antiga 8ª série (atual 9º ano do Ensino Fundamental). No entanto, em relação aos livros didáticos recentemente mais solicitados pelas escolas públicas ao Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio, isso ainda não acontece. Analisamos as três coleções de livros mais solicitadas pelos professores entre 2006 e 2008; e as de 2019. Alguns dos resultados dessas análises estão resumidos em Kaleff et al. (2008) e Kaleff et al. (2010), e observamos que os livros tratam somente do aparecimento histórico das GNE, geralmente em textos apresentados como leituras complementares, sem referências à sua constituição axiomática; enquanto que a abordagem à geometria dos fractais se apresenta em algumas situações, em exercícios motivadores.

Para finalizarmos, com vistas a preencher lacunas referentes às GNE na formação do professor e nos livros didáticos, tecemos considerações sobre alguns exemplos que podem ser levados pelo professor a alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e para os do Ensino Médio.

EXEMPLOS DE MODELOS NÃO EUCLIDIANOS PARA A ESCOLA

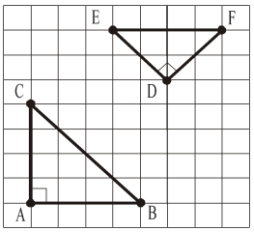
Entre os sistemas possíveis de serem levados para a escola, cabe lembrar uma geometria criada com fins didáticos pelo professor americano Eugene Krause e designada em inglês por *Taxicab Geometry*, segundo Krause (1975). Em língua portuguesa, esse sistema geométrico é designado por "geometria do motorista do táxi", "geometria pombalina" como em Jorge et al. (1999), "geometria do taxista" como em Bigode (2002), ou ainda, como denominamos, "geometria do táxi" (GT). A GT tem por base teórica a adaptação de uma métrica singular, pertencente a uma família de espaços métricos criados pelo matemático alemão Hermann Minkowski (1864 - 1909), ainda no século XIX. Assim, na GT, se calcula a distância (dt) entre dois pontos por meio da soma de dois valores numéricos absolutos, isto é, medindo-se o comprimento dos menores caminhos percorridos, em trechos horizontais e verticais, considerados segundo um determinado referencial. Por outro lado, lembramos que, na GE, considera-se a distância (euclidiana) entre dois pontos como sendo o comprimento do segmento de reta que os une, obtida, portanto, com o auxílio do Teorema de Pitágoras.

Comungando com outros educadores matemáticos, propomos em Kaleff (2016) e Kaleff et al. (2004), o ensino da geometria do táxi (GT) na escola por várias razões: ela pode ser apresentada com a intenção de se integrar a Matemática ao cotidiano do aluno e para a formação do cidadão, pois se

apresenta em todos os lugares, não podendo, portanto, deixar de ser encontrada no espaço da sala de aula e até das ruas. A GT pode ser modelada por meio de uma maquete de um bairro de uma cidade e representada em um mapa como uma malha quadriculada, o que possibilita a leitura do desenho e do entendimento da organização física do bairro, respeitando-se os limites físicos das construções, estabelecidos por meio de ruas, paralelas ou perpendiculares entre si. Segundo enfatiza Fossa (2003), a GT modela mais fielmente a "geografia urbana" do que a própria GE.

Embora a GT pouco difere conceitualmente da GE, pois o faz apenas pela modificação da definição da distância (dt), essa pequena diferença teórica provoca uma grande mudança nos gráficos das figuras em relação aos traçados euclidianos. A observação conjunta de ambas as geometrias, permite ao aluno perceber variações das formas e tamanhos entre os desenhos padronizados da GE e aqueles das novas figuras na GT. Por exemplo, ainda que apresentemos o conceito de "circunferência" com uma mesma definição nas duas geometrias, ele permite duas formas de traçados, um deles inusitado: na GE, temos a curva padrão "redondinha", mas na GT, se apresenta como um "quadrado". Essas variações de traçados dos desenhos podem ser percebidas até mesmo por jovens adolescentes.

Sendo a GT uma GNE, permite ainda observarmos facilmente a negação de um dos axiomas euclidianos de congruência, aquele conhecido como LAL: "Se dois triângulos ABC e DEF têm lado, ângulo e lado consecutivos respectivamente congruentes, então estes dois triângulos são congruentes". Na Figura 1, damos um exemplo, no qual consideramos dois triângulos retângulos cujos catetos têm a mesma distância "dt", no entanto, tais triângulos não são congruentes na GT.



$\hat{A} = \hat{D} = 90°$

Segmentos	Distância do Táxi d_T
AB	d_T (A,B) = 4
BC	d_T (B,C) = 8
AC	d_T (A,C) = 4
DE	d_T (D,E) = 4
EF	d_T (E,F) = 4
DF	d_T (D,F) = 4

Figura 1. Triângulos na GT, que negam o axioma euclidiano LAL Fonte: Kaleff (2016).

Apresentamos, nas Figuras 2, 3 e 4, parte do primeiro "Caderno de Atividades", que compõe uma coleção de textos com atividades as quais também se encontram nas nossas publicações citadas anteriormente. Com essas atividades buscamos levar o aluno a notar uma característica interessante da GT a qual se diferencia na GE, ou seja: as distâncias podem ter relações (> ou =) entre os valores

diferenciadas, conforme a localização dos pontos. Isso pode ser observado na maquete do bairro: quando os prédios estão localizados em uma mesma rua, o valor da distância entre eles, na GE, coincide com o da GT; no entanto, quando os prédios estão em ruas diferentes, o valor da distância, na GT, é maior do que o da GE.

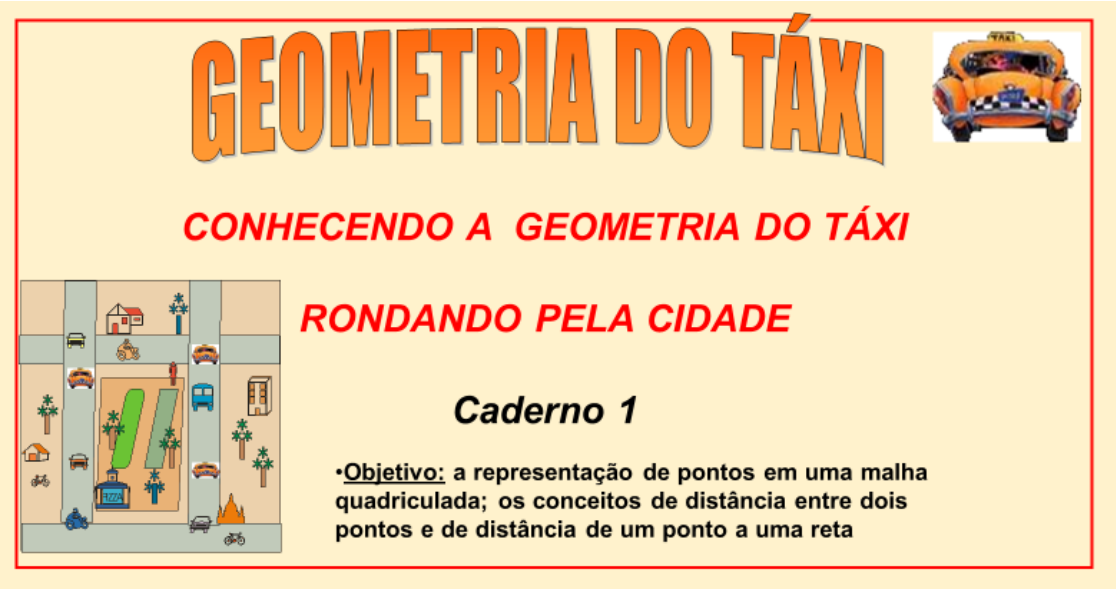
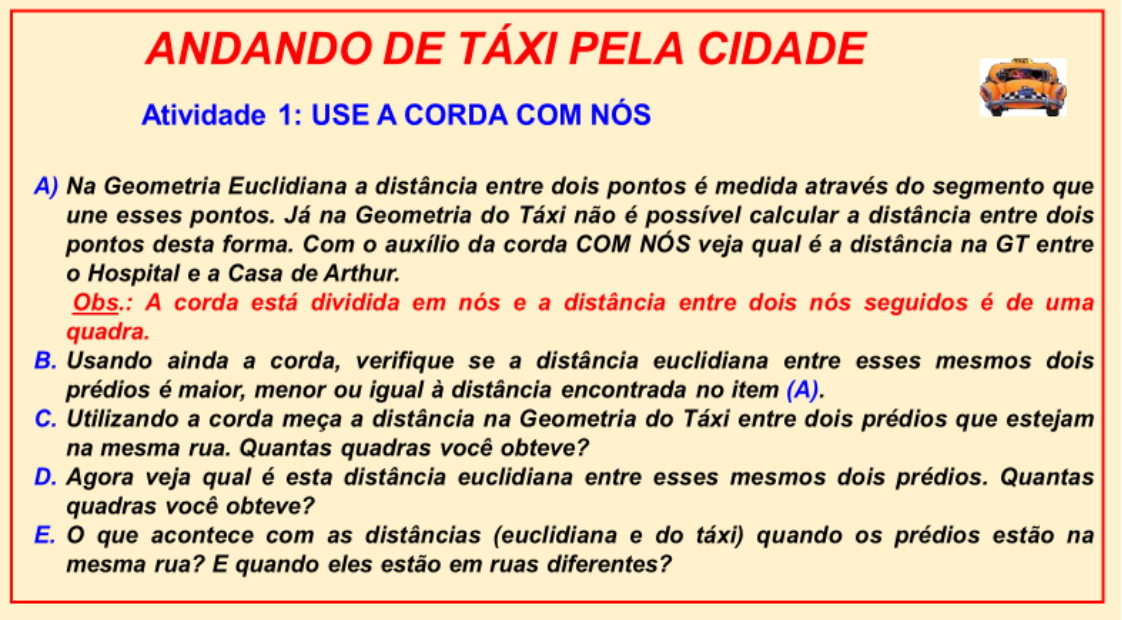


Figura 2. Caderno de Atividades da GT - Página 1. Fonte: a autora.

Figura 3. Caderno de Atividades da GT - Página 2. Fonte: a autora.



ANDANDO DE TÁXI PELA CIDADE

Atividade 1: USE A CORDA COM NÓS

A) ***Na Geometria Euclidiana a distância entre dois pontos é medida através do segmento que une esses pontos. Já na Geometria do Táxi não é possível calcular a distância entre dois pontos desta forma. Com o auxílio da corda COM NÓS veja qual é a distância na GT entre o Hospital e a Casa de Arthur.***

Obs.: A corda está dividida em nós e a distância entre dois nós seguidos é de uma quadra.

B. ***Usando ainda a corda, verifique se a distância euclidiana entre esses mesmos dois prédios é maior, menor ou igual à distância encontrada no item (A).***

C. ***Utilizando a corda meça a distância na Geometria do Táxi entre dois prédios que estejam na mesma rua. Quantas quadras você obteve?***

D. ***Agora veja qual é esta distância euclidiana entre esses mesmos dois prédios. Quantas quadras você obteve?***

E. ***O que acontece com as distâncias (euclidiana e do táxi) quando os prédios estão na mesma rua? E quando eles estão em ruas diferentes?***

Figura 4. Caderno de Atividades da GT - Página 3. Fonte: a autora.

Por sua vez, Fossa (2003) e Noronha (2006) apresentam extensas coleções de atividades para a sala de aula envolvendo o traçado de uma cidade e o desenho de mapas traçados sobre duas redes diferentes. Uma rede quadriculada dá origem à chamada "geometria urbana" e uma rede isométrica à "geometria isoperimétrica". Com base em uma pesquisa bem fundamentada na experimentação, com estudantes do último ano do Ensino Fundamental, Noronha apresenta uma proposta didática baseada na modelagem matemática dessas duas geometrias e na resolução de problemas, com vistas à construção do entendimento dos conceitos de circunferência, elipse e outras curvas, a partir da intuição.

Existem outras GNE que têm sido pesquisadas com vistas ao ensino fundamental. É o caso da "geometria da esfera", cuja interdisciplinaridade é com a geografia. Segundo Martos-Rodrigues (2016), em estudos baseados em experiências envolvendo turmas do último ano do fundamental e realizadas desde 2002, essa educadora matemática fez uso de vários materiais manipuláveis, utilizando também um recurso denominado "esfera de Lénárt", que possibilitam modelar a reta na forma de um círculo máximo de uma esfera, bem como permitem comparar distâncias e medidas de ângulos na GE e na geometria da esfera.

À GUISA DE CONCLUSÃO: UMA ESPERANÇA

Com base no aqui relatado, como já temos pontuado, acreditamos que os formadores de professores e os livros didáticos deveriam considerar as dificuldades apontadas pelos educadores matemáticos, tanto às relacionadas às representações euclidianas, quanto às diversas formas gráficas pelas quais os novos conteúdos geométricos não euclidianos podem ser representados. Por outro lado, nos

cursos de formação (inicial ou continuada) de professores, estes novos conteúdos não deveriam ser (re)visitados somente por meio de noções e desenvolvimentos lógicos dedutivos constitutivos da Matemática, independentes das representações e linguagens, mas também deveriam ser levadas em consideração aquelas dimensões advindas das relações entre o ensino e a aprendizagem pertinentes à Educação Matemática.

Temos a esperança que este texto possa ajudar na aceitação da possibilidade de se desenvolver o pensamento científico por meio da introdução às GNE, nos nossos meios escolares, pois mostramos que existem caminhos para que outras geometrias, além da euclidiana, possam ser introduzidas até mesmo nas escolas do Ensino Básico, todavia é necessário que os professores estejam preparados para tanto e os livros didáticos as considerem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andrade, P. (2013) Introdução à geometria hiperbólica: O modelo de Poincaré. Rio de Janeiro, SBM.

Barbosa, J. L. (2005) Geometria Euclidiana Plana. 2 ed. Rio de Janeiro, SBM.

Barbosa, R. M. (2007) Descobrindo a geometria fractal: Para a sala de aula. Campinas, Autêntica.

Bigode, A. L. (2002) Matemática hoje é feita assim, 8ª série. São Paulo, FTD.

Blumenthal, L. M. (1961) A modern view of geometry. Londres, Freeman.

Brasil (2018) Ministério da Educação. BNCC - Base Nacional Comum Curricular - Ensino Médio. 5 CD-ROM. Disponível em http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc-etapa-ensino-medio. Acesso em 28/06/2021.

Carvalho, J. B. P. (1994) Os Elementos de Euclides. Cadernos da Revista do Professor de Matemática, 1. Rio de Janeiro, SBM.

Duarte, N. (1987) A realização entre o lógico e o histórico no ensino da Matemática. Universidade Federal de São Carlos, Dissertação, São Carlos.

Duval, R. (2003) Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. Alcântara Machado SD. (Ed.) Aprendizagem matemática: Representação semiótica. São Paulo, Papirus, 11-34p.

Fasheh, M. (1998) Matemática, Cultura e Poder. Zetetiké. 6. 9, 09-30p.

Fossa, J. A. (2003) Geometria Urbana. João Pessoa, UFPb Editora.

Franco de Oliveira, A. (1995) Geometria Euclidiana. Lisboa, Universidade Aberta.

Gans, D. (1973) Introduction to non-euclidean geometry. Nova York, Academic Press.

Jorge, A. M. B. et al. (1999) Infinito - Matemática nº 12. Porto, Areal Editores.

Kaleff, A. M. M. R. (2004) Da rigidez do olhar euclidiano às (im)possibilidades de (trans)formação dos conhecimentos geométricos do professor de Matemática. Faculdade de Educação. UFF. Tese, Niterói.

Kaleff, A. M. M. R. (2005) Sobre o poder de algumas palavras e imagens quando se busca avançar além das noções euclidianas mais comuns Boletim-Gepem. 45: 25-46p.

Kaleff, A. M. M. R. (2007) Registros Semióticos e obstáculos cognitivos na resolução de problemas introdutórios às geometrias não-euclidianas no âmbito da formação de professores de Matemática. Bolema. 20, 28. 69-94p. Disponível em <http://www2.rc.unesp.br/bolema/?q=node/91>. Acesso em 15/06/2021.

Kaleff, A. M. M. R. (2010) Geometrias não-euclidianas na educação básica: Utopia ou possibilidade? In: X Encontro de Educação Matemática. *Anais*... Salvador. 2010.

Kaleff, A. M. M. R. (2016) Tópicos em Ensino de Geometria: A Sala de Aula Frente ao Laboratório de Ensino e à História da Geometria. 2 Ed. Niterói: CEAD. 223p. Disponível em:<https://drive.google.com/file/d/0B0M9GEU6FsoVcTBqNDk1eWxBRE0/view?usp=sharing_eid&ts=5787ea05> Acesso em: 15/06/2021.

Kaleff, A. M. M. R. (2021) Obstáculos cognitivos e registros semióticos frente à habilidade de visualização na aprendizagem das geometrias (euclidiana e não euclidianas). Retratos de experiências para visualização em Geometria Oliveira GWB, Izar SB. (Org). Seropédica, Edur/UFRRJ, no prelo.

Kaleff, A. M. M. R. et al. (2004) Atividades introdutórias às geometrias não-euclidianas: o exemplo da geometria do táxi. Boletim. Gepem, 44: 11-42p.

Kaleff, A. M. M. R. et al. (2008) Uma análise da apresentação de retas paralelas em livros didáticos do Ensino Médio. Caderno Dá Licença. 7, 09-36p.

Kaleff, A. M. M. R. et al. (2010) Uma análise dos conteúdos de geometria em um dos livros didáticos do Ensino Médio mais utilizados pelas escolas públicas brasileiras. In: X Encontro de Educação Matemática. *Anais*... Salvador. 2010.

Krause, E. (1975) Taxicab geometry: an adventure in non-euclidean geometry. Nova York, Dover.

Lefebvre, H. (1991). Lógica formal/lógica dialética. Rio de Janeiro, Civilização Brasileira.

Martos-Rogrigues, Z. G. (2016) E quando os ângulos não fecham em 180º: as geometrias não-euclidianas. Curitiba, CRV.

Mlodinov, L. (2004). A janela de Euclides: A história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço. São Paulo, Geração.

Noronha, C. A. (2006) As geometrias urbana e isoperimétrica: Uma alternativa de uso em sala de aula. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Tese, Natal.

Teixeira, A. S. (1968) Pequena introdução à filosofia da Educação: A escola progressiva ou a transformação da Escola. 5. ed. São Paulo, Nacional.

Capítulo IV

Problematização dos números reais com aplicativos: Descobrindo lacunas na reta numérica

Recebido em: 15/07/2021
Aceito em: 25/08/2021
10.46420/9786581460372cap4

Daniela Mendes Vieira da Silva[1*]
Darling Domingos Arquieres[2]
Ion Moutinho[3]

INTRODUÇÃO

Estudos como Barbosa (2012, 2014), Brandão (2005) e Paranhos (2005) apontam que recursos das tecnologias digitais ainda são pouco explorados no processo de ensino e aprendizagem de matemática, no contexto escolar. A fim de contribuir para a apropriação dessa tecnologia por parte dos professores de matemática e para seu uso com intencionalidade didática, o presente artigo introduz um conjunto de atividades educacionais pensadas para a aprendizagem dos números reais com o uso de recursos tecnológicos escolhidos de maneira a propiciar uma abordagem interativa e dinâmica do tema. São três construções eletrônicas, chamadas de *applets* (pequeno programa que executa uma atividade específica, dentro de outro programa maior), que favorecem a exploração de importantes orientações didáticas.

Adiante apresentamos uma revisão a respeito do conjunto dos números reais e os principais aspectos que o diferenciam do conjunto dos números racionais, e explicamos em mais detalhes o tipo de problematização que escolhemos para justificar a extensão dos números racionais para os reais. Na sequência descrevemos os objetivos específicos.

Ambos os conjuntos numéricos, dos reais, R, e dos racionais, Q, possuem a mesma estrutura algébrica básica. Em termos matemáticos formais, os dois conjuntos possuem a estrutura de corpo ordenado, isto é, satisfazem as mesmas propriedades básicas envolvendo as operações aritméticas de adição e multiplicação e envolvendo a noção de ordem. Assim, propriedades como $ax = b \Rightarrow x = b/a$, quando $a \neq 0, e\ a < b \Rightarrow a + c < b + c$ são verdadeiras tanto no contexto dos números racionais quanto no dos números reais. Isso quer dizer, por exemplo, que o tratamento para resolver a

[1] Secretaria Estadual de Educação do estado do Rio de Janeiro.
[2] Secretaria Estadual de Educação do estado do Rio de Janeiro.
[3] Departamento de Análise, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense.
[*] Daniela Mendes Vieira da Silva: danielamvds@yahoo.com.br

equação $3x = 5$ ou a equação $\sqrt{2}x = 5$, a fim de isolar x, é o mesmo, não importa a natureza do número, se é racional ou irracional.

A analogia entre os conjuntos Q e R não funciona plenamente, é só lembrar, por exemplo, que a equação $x^2 = 2$ não tem solução em Q, mas tem em R. Além de diferenças sutis com relação às propriedades algébricas, existe outro aspecto que distingue de modo bem mais marcante o conjunto R do conjunto Q, o aspecto topológico. Em termos matemáticos formais, diz-se que R é mais precisamente um corpo ordenado completo. A explicação matemática para o termo completo é um tanto técnica para os propósitos do presente artigo. Evitando o formalismo matemático, podemos pensar que a completeza $-$ alguns autores usam o termo completude $-$ dos números reais se refere à existência de uma correspondência do conjunto com todos os pontos da reta numérica. Ou ainda, podemos pensar que R é o corpo ordenado completo que estende Q e completa o preenchimento de toda a reta numérica. Inclusive, é justamente esse aspecto topológico que garante a existência da solução para a equação $x^2 = 2$, o irracional $\sqrt{2}$, ou a existência de medidas como a da circunferência de diâmetro 1, o irracional π. A completeza também garante que R não é enumerável, ou contável, mais uma diferença com relação ao conjunto Q. Em linguagem mais precisa, a cardinalidade do conjunto dos números reais é maior do que a do conjunto dos números racionais. Em linguagem não tão precisa, o infinito dado pelo total de elementos de R é maior do que o de Q.

Comungamos com a ideia de que o ensino dos números reais deva ser precedido pela problematização da extensão dos números racionais a partir de situações-problema onde o conhecimento destes não seja suficiente para a obtenção de uma solução. Torna-se central, então, estabelecer quais seriam as situações-problema adequadas para esse objetivo.

Um tipo de situação-problema que pode mostrar a necessidade de ampliação dos números racionais é dado por problemas envolvendo equações algébricas. Problemas como o de encontrar a solução de $x^2 = 2$, ou variações algébricas deste, leva a uma enorme coleção de números irracionais, como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$ ou $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (esta última é a expressão algébrica do famoso número de ouro φ, raiz da equação $x^2 - x - 1 = 0$). Mesmo sendo importantes, principalmente para a explicação de que esses objetos não representam números racionais, problemas algébricos desse tipo não são suficientes para a obtenção de todos os números irracionais. O número π é um exemplo.

Lembrando que é a propriedade de ser completo que diferencia o conjunto R do conjunto Q, estamos considerando que a problematização da extensão de Q envolve principalmente situações-problema relacionadas com a ideia de marcação ao longo de toda a reta numérica, e que aborda o fato de que os números racionais não conseguem cobri-la. Cabe destacar um obstáculo existente em tarefas de

marcação na reta numérica, ou de medição. De modo geral, não existe como saber se determinada representação numérica ou na reta numérica corresponde a um número racional ou não, a não ser por argumentação formal. Por exemplo, em uma atividade de marcação, digamos que com régua e compasso em uma folha de papel, da diagonal do quadrado de lado 1 na reta numérica, não tem como saber só pela marca obtida, ou pelo processo de construção realizado, se esta corresponde a um número racional.

Lançando mão do teorema de Pitágoras, por exemplo, até podemos obter uma representação algébrica para a diagonal, a saber, $\sqrt{2}$. E ainda assim, só olhando esta representação não temos como saber se a marca corresponde a uma fração de números inteiros ou não. Até onde sabemos, a comprovação, ou mesmo o reconhecimento, de que a diagonal do quadrado de lado 1 não corresponde a nenhum número racional é dada por um argumento formal, normalmente envolvendo um método de prova conhecido como prova por contradição, ou redução ao absurdo.

Só para reafirmar essa ideia, lembramos que a constatação de que o número π não é um número racional só ocorreu no século XVIII, devido a Johann Heinrich Lambert, mesmo sendo conhecido e até utilizado desde as civilizações antigas, como a dos egípcios e dos babilônios. Foram mais de três mil anos até se encontrar uma explicação definitiva para o fato de que a medida de π não corresponde a nenhum número racional.

Este estudo se justifica pois ele mostra uma abordagem diferenciada do ensino tradicional dos números reais presente em livros didáticos em geral e, por conseguinte, presente também nas salas de aula, uma vez que os livros didáticos são o material de apoio mais utilizado pelos professores (Gomes et al., 2014).

A abordagem encontrada em diversos livros didáticos de Matemática em relação ao ensino de números reais aponta comumente que os números racionais são aqueles que podem ser escritos em forma de fração com denominador e numerador inteiros e denominador diferente de zero, que todo número que não é racional é irracional e que a reunião dos números irracionais e racionais compõe o conjunto dos números reais (Ripoll et al., 2016). O estudo de González-Martín et al. (2013) a respeito da introdução dos números reais no ensino escolar apresenta uma visão relativamente ampla de como os livros didáticos brasileiros lidam com a questão.

Segundo resultados obtidos, livros didáticos começam fornecendo definições e propriedades articuladas como conhecimentos de listas de regras sem justificativas e como procedimentos a serem sabidos. Em particular, problemas que motivaram a expansão do conjunto dos números racionais ou que justifiquem a necessidade dos novos conceitos não são trabalhados nesses materiais instrucionais. A abordagem algébrica é dominante e a maioria das tarefas requer a simples reprodução de técnicas. Um

problema nesse quadro descrito é que, como veremos na próxima seção, a abordagem algébrica é insuficiente para justificar a criação de todo o conjunto dos números reais.

Considerando os aspectos matemáticos expostos a respeito dos números reais e o compromisso didático de problematizar o conceito a ser introduzido antes da sua formalização, concluímos esta seção apresentando as intenções didáticas e matemáticas que nos guiaram no presente trabalho. A saber, visando o questionamento das limitações dos números racionais para problemas de medição, ou marcação na reta numérica, procuramos desenvolver atividades didáticas que pudessem levar um educando a fazer questionamentos como os seguintes.

- É possível estabelecer uma correspondência entre todos os pontos da reta e os números racionais?
- Números obtidos por outros meios que não sejam diretamente pela fração de inteiros podem ser representados na reta numérica? Podem ser medidos pelos números racionais?
- Qualquer segmento de reta pode ser medido pelos números racionais?

Portanto, o objetivo geral do presente estudo é o de apresentar uma sequência comentada de atividades para a construção dos números reais relacionando-os à completeza da reta real.

Como objetivos específicos temos:

- Fazer uma discussão teórica sobre a completeza da reta real.
- Selecionar e apresentar *applets* gratuitos que facilitem a construção da completeza da reta real.
- Discutir a utilização dos *applets* supracitados para a construção da completeza da reta real.

Este estudo está estruturado nesta introdução, em uma seção de materiais e métodos, em uma sessão de apresentação de uma sequência de atividades propostas e comentadas, em considerações finais e em referências bibliográficas.

MATERIAIS E MÉTODOS

Por materiais nos referimos aos três *applets* que serão explorados aqui como uma ferramenta didática de mediação. Por métodos nos referimos a estratégias e orientações que tornarão os *applets* um material didático. Iniciamos apresentando os referenciais teóricos que inspiraram o método de utilização dos *applets* como uma ferramenta de mediação na construção de conhecimentos sobre os números reais. Considerando que a nossa proposta é a de trabalhar com alunos em um ambiente computadorizado dinâmico e considerando o objetivo de problematizar a introdução de um conceito a ser introduzido, nos referimos a Arcavi et al. (2000) e a Duval (2003).

Arcavi et al. (Ibidem) destacam alguns componentes importantes para atividades didáticas que antecipem a formalização de conhecimentos matemáticos, a saber, visualização, experimentação, surpresa e *feedback*. Vejamos mais detalhes sobre essas quatro características.

Em ambientes computadorizados dinâmicos encontramos recursos que facilitam a representação e visualização das informações envolvidas em uma dada situação-problema. Mais ainda, existem recursos que permitem transformar objetos construídos em tempo real, o que facilita a descoberta de relações que se destacam ao permanecerem invariantes por tais transformações. Na verdade, ambientes dinâmicos assim oferecem recursos para diversos tipos de testagens e verificações dos diversos exemplos produzidos, como medição, comparação, deformações de figuras e mudanças de configurações. É a possibilidade real de se experimentar em Matemática. Experiências, principalmente em Matemática, não podem ser usadas para justificar uma afirmação, mas são importantes para dar suporte na formação de conjecturas ou podem ajudar a produzir um exemplo que eventualmente refute determinada conjectura.

Ainda segundo Arcavi et al. (Ibidem), ambientes computadorizados dinâmicos também têm o potencial de promover surpresas com relação às previsões feitas pelo aluno para a situação-problema considerada e de fornecer um feedback referente às ações de testagem realizadas pelo aluno. Porém, os autores fazem ressalvas importantes com relação ao planejamento das atividades didáticas envolvendo tal ambiente virtual. Em primeiro lugar, é importante pedir que alunos façam previsões explícitas e ponderadas a respeito da exploração a ser realizada no ambiente computadorizado. Depois, é interessante planejar cenários, isto é, configurações para os objetos matemáticos envolvidos e representados no ambiente computadorizado, de tal maneira que o aluno possa ser surpreendido de alguma forma, com relação às previsões feitas inicialmente. A ideia é que resultados inesperados despertem no aluno o interesse em um novo exame de seus conhecimentos e suposições. E para que o aluno seja surpreendido, é importante que ele tenha um *feedback* de suas ações e dos resultados obtidos delas. Ou seja, o cenário projetado para o ambiente computadorizado deve levar em consideração esses aspectos. Cabe notar que esse tipo de ambiente se destaca por possibilitar um *feedback* imediato.

Também consideramos orientações de Duval (2003) e entendemos que a construção de conhecimentos matemáticos depende de três tipos de ações ligadas à representação do objeto matemático: o próprio ato de representar o objeto matemático em questão; tratar a representação obtida dentro de um dado sistema de representação; e converter a representação para um outro sistema de representação.

A representação de um objeto matemático pode se referir a uma das seguintes modalidades de representação: símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos ou desenhos. O termo, sistema de representação, se refere a uma dessas modalidades como um conjunto de registros de representação. Por

exemplo, podemos representar a unidade dividida em três partes por 1/3 ou 0,333..., também podemos recorrer a uma representação geométrica, por exemplo, na reta numérica. Quando realizamos a transformação 1/3 = 2/6, fizemos um tratamento, e, quando realizamos a transformação 1/3 = 0,333..., fizemos uma conversão.

Segundo Duval (Ibidem), a realização das transformações do tipo conversão é necessária para a compreensão de conceitos matemáticos.

Os três *applets* são "Cobrindo um segmento com frações"*, "Raiz de 2 é racional?"** e "MusiCalcolorida"***. A partir de agora vamos nos referir a eles como *applet* 1[2], *applet* 2 [3]e *applet* 3[4], respectivamente.

Cada *applet* será descrito em mais detalhes na próxima seção (vale a pena conferir as figuras 1, 2 e 3 antes de continuar a leitura), mas por hora vamos destacar algumas características gerais dos três aplicativos e o método geral de uso deles.

O primeiro ponto é considerar a acessibilidade proporcionada pelo *applet* de trabalho, o que ele proporciona ao usuário. Os três *applets* que estamos estudando são bastante intuitivos, pois possuem uma boa visualização das informações a serem trabalhadas e são de fácil interação.

Outra questão importante é saber se o *applet* de trabalho presta bem para os objetivos matemáticos, ou seja, a propriedade ou conceito que o professor que trabalha com os alunos. No nosso caso, nenhum dos três *applets* apresenta qualquer relação explícita com nosso assunto, números reais. Só o *applet* 2 exibe uma representação da reta numérica com a indicação de somente três números, 0, 1 e $\sqrt{2}$, isso parece ser muito pouco. Contudo, essa característica dos três *applets* não é determinante, pois cada *applet* apresenta um sistema de representação que pode ser correspondido com um sistema de representação simbólico para os números reais e que tem grande apelo intuitivo. As *applets* 1 e 2 remetem a ideia de números reais corresponderem a pontos da reta, enquanto o *applet* 3 remete a ideia de padrão e ritmo, apelos intuitivos interessantes para a classificação dos tipos de dízima numérica.

De posse de um *applet* e de um objetivo matemático, o próximo passo é estabelecer uma pergunta interessante, que não seja um problema rotineiro e que possa levar o aluno a surpresas. Pode ser

[2] https://www.geogebra.org/m/eW9MfdWv.

[3] https://www.geogebra.org/m/ewRQGAAP.

[4] http://matematicainclusiva.net.br/aplicativo.php.

interessante apresentar a pergunta ao aluno mostrando como a questão se relaciona com o *applet* de trabalho.

Após a pergunta ser apresentada, deve-se pedir para o aluno fazer uma previsão sobre a questão e ponderar sobre ela. É importante pedir para o aluno registrar sua resposta e ponderações, por escrito ou explicando para o professor. Inclusive, isso pode ser uma oportunidade para avaliar como o aluno administra seus conhecimentos sobre o assunto trabalhado. A atividade de exploração do *applet* deve começar a partir desse momento. A ideia é inserir dados variados e utilizar todos os recursos de interatividade. A facilidade na representação e visualização de conceitos relacionados aos números reais deve produzir boas surpresas para o aluno.

Acabamos de apresentar um resumo do roteiro de trabalho com *applets* que estamos sugerindo. Antes de passarmos para a próxima seção, onde iremos dar mais detalhes a respeito dessas ações descritas, enfatizamos que ao longo de todo o processo é fundamental que o professor faça a mediação das ações de representação que serão necessárias a todo momento. Vejamos todas essas questões em mais detalhes a seguir.

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PROPOSTAS E COMENTADAS

Apresentamos e comentamos aqui uma sequência de atividades que abordam a completude do conjunto dos números reais utilizando, para tanto, recursos tecnológicos de uso livre e gratuito.

A primeira prática pretende fazer com que o participante compreenda que o conjunto dos racionais, embora denso (uma vez que entre dois números racionais sempre é possível interpor um outro número racional), não é suficiente para cobrir toda a reta real. O *applet* 1 é o aplicativo utilizado para essa prática. A pergunta que elaboramos para motivar o estudo com alunos é a seguinte.

Questão: É possível preencher completamente o segmento entre 0 e 1 da reta numérica com números racionais? Explica como pensou sobre o assunto.

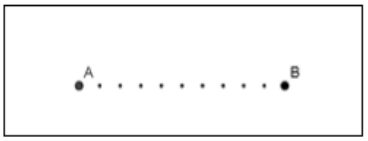
Entendemos que a questão apresentada não é do tipo problema rotineiro. Isto é, a resolução do problema colocado dificilmente se dará pela substituição de dados em um problema genérico já resolvido anteriormente. Consequentemente, o aluno precisará administrar seus conhecimentos sobre o assunto em questão, quando lhe for pedido para ponderar e se posicionar a respeito da pergunta colocada.

De acordo com a dinâmica estabelecida na seção anterior, é importante deixar o aluno explicar como ele pensou sobre a pergunta colocada e lembrar que ele precisa trabalhar, provavelmente mediado pelo professor, a conversão entre diferentes sistemas de representação. Por exemplo, o professor pode

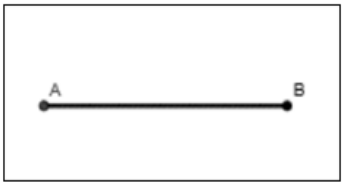
orientar o aluno a visualizar a reta numérica olhando os pontos A e B como pontos desta reta, com A representando o zero e B representando o 1. Aí, fazendo $n = 3$, pode pedir para o aluno dizer que números estariam representados pelos dois pontos que surgiriam na tela, entre A e B. Pode acontecer do aluno pensar na resposta em termos de representação decimal (isso é muito comum) e, nesse caso, ele pode apresentar dificuldades em estabelecer uma resposta. Já aconteceu, em uma vivência com alunos do 8º ano do ensino fundamental, de um dos alunos responder 0,3 e 0,7, quando ele se baseou no aspecto visual e na proporção dos espaços entre pontos. Nesse momento o professor orientou o aluno a pensar em termos de frações, a resposta 1/3 e 2/3 foi imediata. É interessante usar esse momento para avaliar a preferência dos alunos entre as representações decimal e fracionária para os números racionais.

Podemos cobrir um segmento com frações?

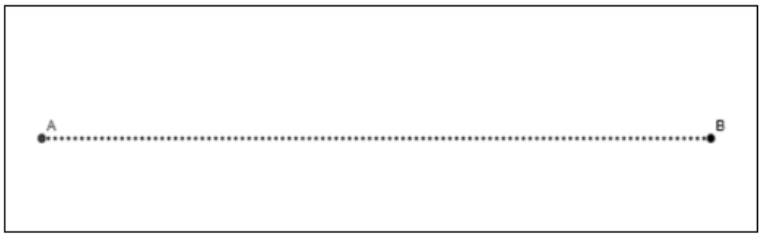
Quartos



Décimos



Centésimos



Zoom mais nos centésimos

Figura 1. Cenários obtidos do *applet* 1 com diferentes entradas de valores. Fonte: Os autores.

Ainda sobre a questão de associar a representação intuitiva de pontos e segmento de reta do *applet* 1 com o conceito matemático de números reais e de promover representações semióticas e conversões

entre diferentes sistemas de representação, às vezes alunos podem necessitar de um recurso mais tangível que o aplicativo eletrônico. Nesse caso, o professor ainda pode usar o *applet* 1 ao seu favor relacionando-o com uma régua, pois podemos fazer analogias entre os pontos obtidos para n = 10, 100 ou 1000, com unidades de medida como decímetro, centímetro e milímetro. E neste caso podemos trabalhar com as representações decimais.

Vejamos mais sobre as funcionalidades do *applet* 1. Podemos escolher o denominador das frações que "cobrirão" o segmento AB atribuindo diferentes valores para n. Veja, por exemplo, que, se o denominador em questão for pequeno, não é possível cobrir o segmento (se o *zoom* não for alterado[5]). Tome-se $n = 4$, por exemplo (figura 1), observe que com quartos não se consegue cobrir o segmento. Veja abaixo o que ocorre com décimos (figura 1), observe que com décimos ainda não se consegue cobrir o segmento, mas que eles preenchem melhor o segmento do que os quartos. Isto pode levar o seu estudante a pensar que talvez com centésimos seja possível cobrir o segmento. Observe o que acontece quando centésimos são usados (figura 1), o segmento AB parece "preenchido" com centésimos, mas que basta dar um *zoom* mais no segmento para se observar que "buracos" apareceram nele (Figura 1).

Isto continuará acontecendo ainda que sejam utilizados valores cada vez maiores para o denominador das frações (gerando frações cada vez menores portanto) com as quais "intenta-se" "cobrir" o segmento (sempre mantendo esta dinâmica de partir do último zoom mais, fazendo parecer que o segmento foi coberto, o que se desfaz ao se aplicar mais um *zoom* mais).

Em uma turma de segunda série do ensino médio, na qual a primeira autora deste artigo leciona, os estudantes se dividiram em suas observações sobre ser ou não possível preencher o segmento com frações, uma vez que muitos deles haviam decorado que a reta real era completa e composta de números racionais (os quais podem ser escritos em forma de fração) e irracionais (os quais não podem ser escritos em forma de fração).

O *applet* 1 mostrava, utilizando conversões entre representações numéricas e visuais, que aparentemente era possível cobrir o segmento de reta em questão apenas com frações e o *zoom* mais mostrava que não importava quão grande era o denominador, e, portanto, quanto menores fossem as frações e seus múltiplos, que não era possível preencher o segmento de reta completamente. O uso do *zoom* mais para mostrar que havia "buracos" suscitou dois tipos de reação, para os estudantes que esperavam que não fosse possível tal preenchimento, o surgimento dos buracos se mostrou um momento de grande alívio, pois confirmava o que eles haviam decorado e a segunda reação foi a de surpresa para

[5] Destacamos aqui que é possível utilizar a tecla *zoom* menos até que o segmento pareça completamente preenchido.

os estudantes que não estavam esperando os "buracos" porque acreditavam ser suficiente cobrir o segmento de reta em questão com frações cada vez mais próximas de zero.

Esta divisão de expectativas ocorreu não só nesta turma de segundo ano, mas também em oficinas com o tema construção de números reais dadas pela primeira autora e, também, em suas aulas no ensino superior. Porém, tanto nas oficinas quanto no ensino superior, os participantes/estudantes se calçavam fortemente na definição de fração (uma fração é um número do tipo a/b com a e b inteiros e b diferente de zero) e foi preciso destacar que o *applet* 1 pode auxiliar o educando a compreender que racionais e irracionais têm diferentes naturezas. Este *applet* auxilia, ao coordenar diferentes representações, como previsto por Duval (2003), portanto, o educando a entender que os números racionais não dão conta de preencher o segmento e, por extensão, toda a reta Real. É esta ideia que implica na seleção do próximo *applet* a ser apresentado.

A segunda prática pretende revelar a existência de números com uma natureza diversa à natureza dos números racionais, ou seja, aqui pretende-se que o aluno compreenda que os "buracos" que apareceram na prática anterior são preenchidos por números que não são racionais, ou seja, pelos números irracionais. Esse tema é trabalhado com apoio do *applet* 2 (figura 2). Observe que o segmento raiz quadrada de dois é a diagonal do quadrado de lados iguais a um e sua medida foi calculada a partir do Teorema de Pitágoras[6]. Este segmento foi transportado para a reta numérica com a ferramenta compasso do GeoGebra e é neste segmento transportado que trabalhamos.

Para o *applet* 2 a sugestão é colocar a seguinte questão de trabalho.

Questão: É possível medir a diagonal do quadrado de lado 1 com frações?

O *applet* 2 trabalha, utilizando simultaneamente representações numéricas e visuais, com uma unidade de medida escolhida coincidindo com a medida do lado do quadrado. A ideia aqui é criar frações a partir da nossa unidade de medida um, ou seja, do tipo 1/n (n pertencente aos naturais) e, com múltiplos dela do tipo m/n (m e n pertencentes aos naturais), poder medir o segmento raiz quadrada de dois estabelecendo uma correspondência entre m/n e a raiz quadrada de dois. Novamente, é possível relacionar o uso deste *applet* com o instrumento mais tangível, a régua. Agora, é extremamente interessante notar que a medição com régua ocorre por decimais (ou frações decimais, se quisermos converter para frações). Isso é notável, pois a medição por frações pode gerar resultados melhores sem precisar recorrer a números tão grandes. Vamos explicar melhor essa diferença mais adiante.

[6] O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Link para demonstração deste Teorema aqui: https://pt.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geometry-pythagorean-theorem/basic-geometry-pythagorean-proofs/v/pythagorean-theorem-proof-using-similarity

Como exemplo, para explicar melhor o funcionamento do *applet* 2 mostramos a divisão da unidade de medida um por cinco, obtendo-se quintos, observe na figura abaixo (figura 2) que 7/5 se aproxima muito da raiz quadrada de dois, mas não coincide exatamente.

Observe que se décimos forem usados, ou seja, usando-se n = 10, buscando-se a correspondência procurada encontra-se a seguinte situação (figura 2) e observa-se que 14/10 se aproxima muito da raiz quadrada de dois, mas não coincide exatamente. Se quisermos fazer aqui a analogia com a régua, podemos dizer para o aluno que o resultado da medida seria 1,4 unidades (poderia ser centímetros, se usássemos a convenção de que o quadrado tem lado medindo 1 cm).

Observe que se centésimos forem usados, ou seja, para n = 100, buscando a correspondência procurada, encontra-se a seguinte situação (figura 2) e observa-se que há um múltiplo de 1/100 do tipo m/100 que parece coincidir com raiz quadrada de dois (figura 2). Porém basta dar *zoom* mais para perceber-se que tal correspondência não se estabelece (figura 2). Na analogia com o uso de régua, contando os pontos na tela a partir da marca de 1, teríamos que 1,41 seria a melhor aproximação da diagonal, em centésimos.

A medição por frações pode ser bastante curiosa, principalmente se comparada com a medição com régua (com decimais). O leitor pode verificar, visitando o *applet* 2, que podemos obter aproximações excelentes para a raiz quadrada de 2 com números relativamente pequenos. Fazendo n = 12 encontramos uma aproximação melhor do que com n = 100, é a fração 17/12. Esta é uma medida mais precisa do que 1,41. Com n = 17 obtemos uma medida ainda mais precisa, podemos verificar visualmente, no *applet*, que 7/17 está mais próximo da marca de $\sqrt{2}$ do que 17/12. Já a fração 99/70 oferece uma medição notável. Já aconteceu de licenciandos em Matemática passarem a acreditar que a raiz quadrada de 2 pode ser medida por uma fração, após a visualização desse resultado. É uma medida mais precisa do que fazendo n = 1000, quando o resultado tem precisão de milésimos.

Ainda que se faça mais algumas tentativas com denominadores mais variados e que se repita o processo de dar *zoom* mais o que se observará é que sempre faltará algo para que a correspondência esperada se estabeleça. Isto pode levar o seu estudante a intuir que não seria possível tal correspondência e para consolidar esta percepção, você pode fazer a demonstração de que raiz quadrada de dois não é racional[7] com o intuito de levar seus alunos a compreenderem que existem, dentro dos números reais, números de duas naturezas, ou seja, os números racionais e os números irracionais. Portanto, a reunião dos números racionais aos irracionais perfaz o conjunto dos números reais e preenche a reta numérica,

[7] Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/algebra/rational-and-irrational-numbers/proofs-concerning-irrational-numbers/v/proof-that-square-root-of-2-is-irrational

uma vez que com racionais e irracionais é possível estabelecer uma relação biunívoca[8] entre cada ponto da reta numérica e cada número real.

Em uma turma de segunda série do ensino médio, na qual a primeira autora deste artigo leciona, os estudantes, ao explorarem o *applet* 2 já estavam esperando que a medição do segmento de comprimento raiz quadrada de dois com números racionais recaísse em um "buraco" quando se aplicasse *zoom* mais nesta ferramenta.

Ao serem perguntados sobre o motivo pelo qual eles esperavam tal coisa, os estudantes se dividiram em duas correntes, a saber. A primeira contava que haveria um "buraco" porque isto já havia acontecido na prática anterior e a segunda percebeu que estávamos tentando alcançar um número que não poderia ser escrito em forma de fração com uma fração e que tal medida seria impossível de maneira exata.

Em oficinas de formação de professores e em aulas na graduação e pós graduação em disciplinas de instrumentação de ensino de Matemática os participantes/estudantes já esperavam que tal "buraco" ocorresse e até mesmo houve quem se lembrasse da demonstração de que raiz quadrada de dois é irracional e destacasse que o *applet* 2 em questão seria interessante para trabalhar a incomensurabilidade entre racionais e irracionais. Veja que o uso de diferentes representações auxilia na apreensão do conceito, uma vez que na reunião das representações numéricas e visuais a diferente natureza de números racionais e irracionais é explicitada, isto ocorre quando não é possível medir um pelo outro e o *applet* 2 permite esta inferência ao indicar dinamicamente que tal medida é impossível.

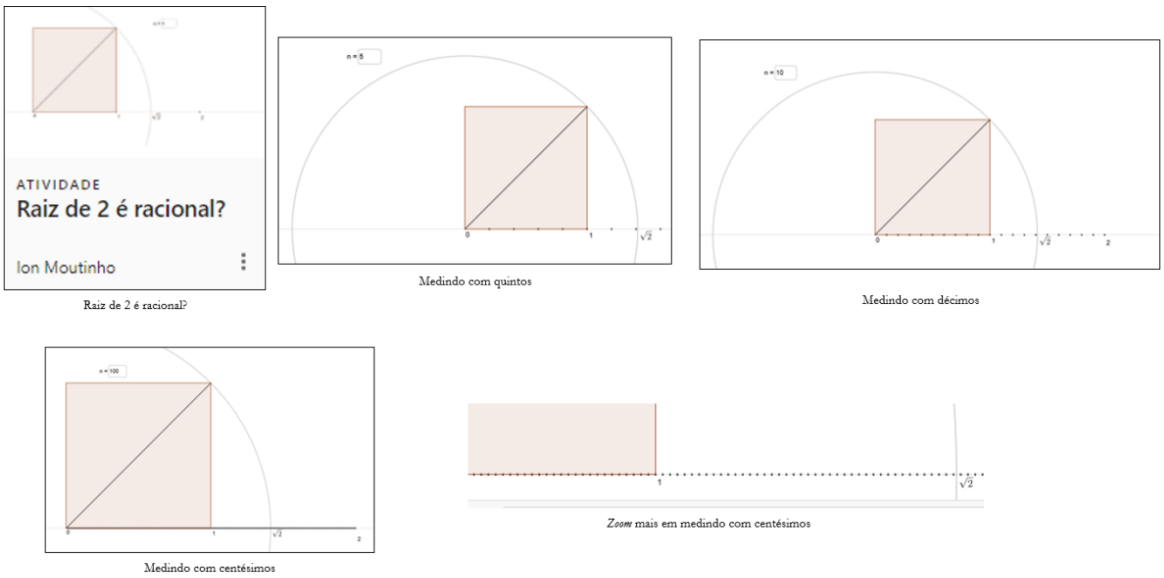


Figura 2. Cenários obtidos do *applet* 2 com diferentes entradas de valores. Fonte: Os autores.

[8] Que estabelece uma correspondência entre dois conjuntos, sendo que cada elemento de um conjunto está somente associado a um, e só um, elemento do outro: relação biunívoca (https://abre.ai/c4Tv).

Com o *applet* 3 pretende-se consolidar as discussões sobre números racionais e irracionais visualizando a representação decimal desses números de forma multissensorial. Neste micromundo os cálculos que resultam em números com expansão decimal, seja ela finita ou infinita, estão no centro dos interesses, uma vez que a calculadora associa à cada número das expansões decimais, que são resultado de operações feitas na sua calculadora integrada, cores (0-branco, 1-lilás, 2-azul escuro, 3-azul claro, 4-verde escuro, 5-verde claro, 6-amarelo, 7-laranja, 8-vermelho claro e 9- vermelho escuro) e notas (0 -dó, 1 – ré, 2 – mi, 3 – fá, 4 – sol, 5 – lá, 6 – si, 7 – dó, 8 – ré, 9 – mi.). Observe o que acontece quando dividimos 35789 por 100000 (figura 3).

Veja que o número 3 é representado pelo bloco azul claro, o número 5 é representado pelo bloco verde claro, o número 7 é representado pelo bloco laranja, o número 8 é representado pelo bloco vermelho claro e o número 9 é representado pelo bloco vermelho escuro. Já as notas associadas são 3 – fá, 5 – lá, 7 – dó, 8 – ré, 9 – mi.

Destacamos aqui que o uso da calculadora fica mais interessante quando operamos com dízimas periódicas, uma vez que tanto a visualização em blocos coloridos da sua expansão decimal quanto a audição das notas associadas à sua expansão decimal apontam para um padrão periódico. Vejamos, por exemplo, o que acontece quando dividimos 647/999 (figura 3).

Observe que um padrão periódico é imediatamente desenhado quando fazemos a operação supracitada, o que permite uma visualização imediata da periodicidade da expansão decimal. Este é um excelente momento para discutir que uma dízima periódica é uma fração, veja que uma fração (647/999) originou esta dízima periódica (0,647647647647...) que estamos observando na figura 3. Cabe aqui discutir com os seus alunos que uma dízima periódica se constitui como tal porque, como estamos trabalhando com a divisão de um inteiro a por outro b (b diferente de zero) resultando em um quociente q, a quantidade de restos de uma divisão é limitada a b 1 para um divisor b qualquer (exceto zero), ou seja, em algum momento um resto irá se repetir e os restos subsequentes irão se repetir o que repercute na expansão decimal do quociente q da divisão[9]. Clicando na clave de sol do micromundo você também pode ouvir este padrão periódico, pois as notas se repetem uma vez que a cada número é atribuída uma nota e como os números se repetem periodicamente também as notas se repetirão periodicamente formando um padrão periódico possível de ser ouvido.

Também é importante destacar o uso deste micromundo para discutir a não periodicidade da expansão decimal de um número irracional, observe que é possível existir números irracionais com

[9] A demonstração deste fato pode ser encontrada em http://abre.ai/bmuq

padrões não periódicos, 0,01001000100001... é um exemplo. Inclusive, vemos aqui uma oportunidade de enfatizar certos conhecimentos a respeito dos números racionais. Não é incomum um aluno se prender ao termo padrão para identificar um número racional. A discussão sobre os diferentes tipos de padrão e a identificação destes por meio de visualização parece ser uma ótima oportunidade para realçar a caracterização dos números racionais pela representação decimal.

O micromundo MusiCalcolorida oferece a possibilidade de se trabalhar com a raiz quadrada de 2 e infelizmente, embora tenha o botão, não oferece a possibilidade de trabalharmos com pi devido a um defeito do projeto. Também é importante salientar que o micromundo tem limitações, uma vez que ele mostra, no máximo, 5000 casas de uma expansão decimal, e no caso de uma dízima periódica com períodos maiores que 5000 casas teríamos a impressão de se tratarem de dízimas não periódicas devido à limitação do micromundo. Entretanto, o micromundo é muito eficiente para dízimas periódicas com períodos mais curtos, por exemplo. Voltando ao número irracional raiz quadrada de dois, ao inserir a operação raiz quadrada de dois obtemos a tela abaixo (figura 3).

Observe que visualmente já é possível perceber a falta de padrão periódico da expansão decimal de raiz quadrada de dois. Também, clicando-se na clave de sol, é possível perceber a falta de padrão periódico quando as notas associadas aos números da expansão decimal em foco são tocadas.

Este micromundo é uma opção, portanto, para explorar a natureza dos números racionais e irracionais em uma perspectiva multissensorial consolidando as primeiras duas atividades vivenciadas. Vale a pena destacar que este micromundo foi projetado para o trabalho com alunos com deficiência visual e auditiva, mas que ele pode ajudar a todos os que se interessarem em utilizá-lo.

Em um curso de extensão no qual a primeira autora deste artigo leciona, os cursistas ficaram muito desconfortáveis quanto ao caos observado na expansão periódica dos irracionais algébricos raiz quadrada de dois e raiz quadrada de três, foi visível que o caos visual e auditivo os incomodou, tal incômodo não ocorreu quando os racionais foram representados, foi perceptível que os cursistas ficaram confortáveis com os padrões musicais e visuais periódicos. As múltiplas representações auxiliaram de fato os participantes a compreenderem as diferentes naturezas dos números racionais e dos números irracionais, como previsto por Duval (2003), já que os cursistas puderam compreender melhor os conceitos ao fazer as conversões entre as representações numéricas, musicais e visuais, associando os racionais à reconfortantes padrões periódicos e os irracionais à desconfortáveis mosaicos e sons caóticos. Este comportamento tem se repetido em oficinas de formação de professores e em disciplinas de instrumentação para o ensino de Matemática no ensino superior nos quais a primeira autora deste estudo atua.

Já em uma turma de segunda série do ensino médio na qual a primeira autora deste artigo leciona, o que chamou a atenção dos estudantes foram justamente os padrões periódicos e o fato de que uma dízima periódica tem uma fração geratriz e é um número racional. A coordenação entre representações numérica, visual e sonora foram fundamentais para a compreensão da dízima periódica como sendo um número racional.

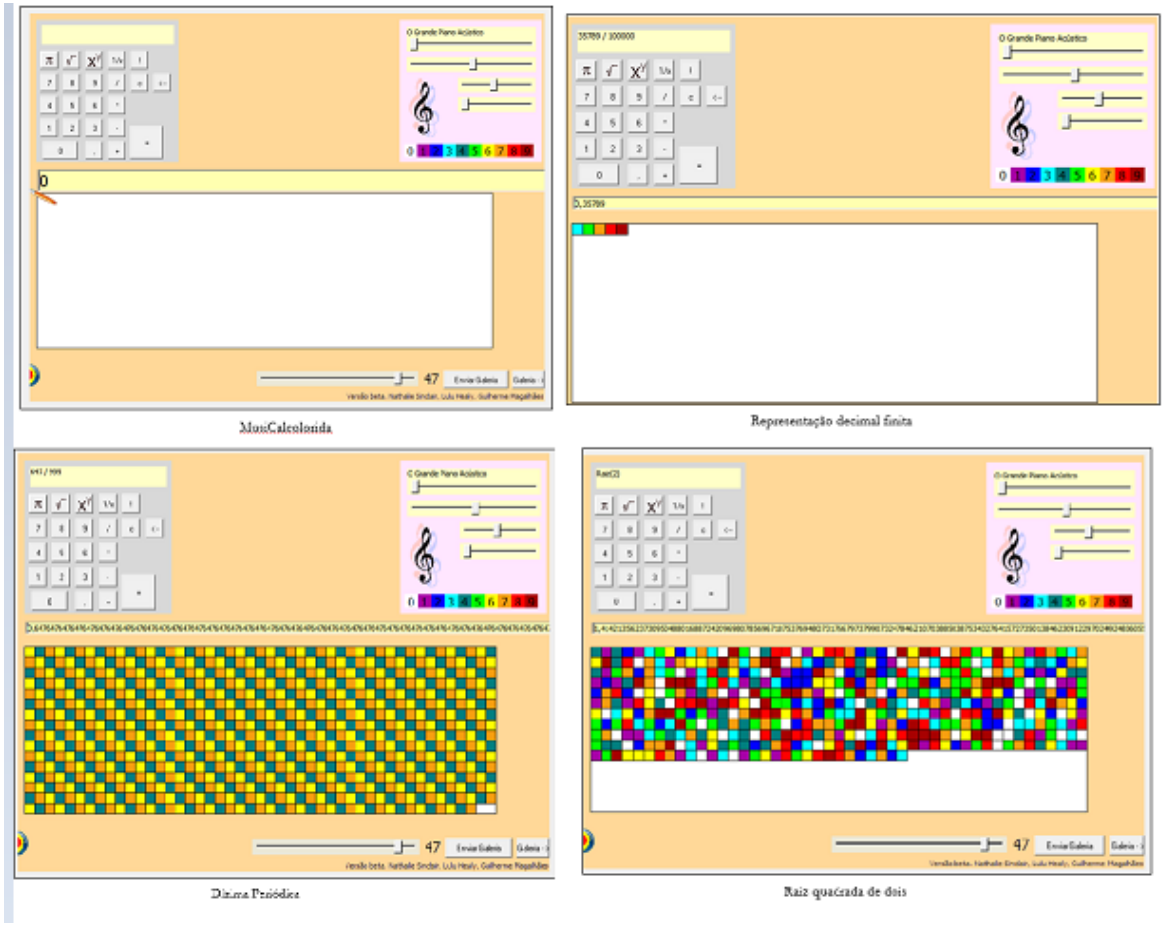


Figura 3. Cenários obtidos do *applet* 3 com diferentes entradas de valores. Fonte: Os autores.

Apresentamos três sugestões de questão não rotineira para motivar um estudo introdutório para os números reais mediado pelo *applet* 3, de acordo com as ações explicadas aqui.

Questão: Sabemos que todo número obtido pela calculadora gera uma sequência de cores. Será que toda sequência de cores pode ser obtida de uma fração de inteiros?

Questão: Toda sequência de cores produzida pela calculadora tem padrão periódico?

Questão: Todo padrão de cores pode ser obtido de uma fração de inteiros?

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos aqui a questão de problematizar a introdução do conceito de números reais a partir da constatação de limitações do conjunto dos números racionais, algo que não costuma ser considerado em livros didáticos, segundo pesquisas. Utilizando três *applets* gratuitos e orientações didáticas apropriadas, vimos como a tecnologia digital pode ser utilizada como recurso de mediação a fim de promover uma discussão ampla sobre o tema, números, e esgotando propriedades a respeito dos números racionais. A proposta didática, além de motivar a extensão do conjunto dos números racionais para os reais, apresenta a oportunidade de o aluno administrar seus conhecimentos sobre os números racionais em situações não rotineiras e de o professor avaliar tais conhecimentos. Nossas vivências têm mostrado que a abordagem parece servir também para o aluno rever e ampliar seus conhecimentos sobre os números racionais. Um exemplo são as possíveis discussões em torno da determinação de padrões nas dízimas numéricas, pois nem todo padrão é de repetição periódica, isto é, nem todo padrão na dízima determina um número racional.

Outro aspecto revelado por vivências as sequências didáticas introduzidas aqui é o potencial desse recurso tecnológico para promover uma aprendizagem ativa e colaborativa. A divergência de posições demonstrada por alunos de modo geral e a facilidade de produção de exemplos, e visualização destes, os *applets* possibilitam boas discussões em sala. A facilidade de produção de exemplos parece favorecer a inserção do aluno como ator responsável pela sua aprendizagem, e o professor mediar esse processo estimulando a todo momento a participação do aluno. Também percebemos que as diferentes visões e experiências relatadas por diferentes alunos, ao longo do processo de ensino, parecem contribuir para que alunos aprendam com os seus pares. Essas são apenas algumas impressões, tudo indica que seria interessante desenvolver observações mais precisas a respeito dessa possível dinâmica ativa e colaborativa.

As orientações apresentadas na seção, MATERIAIS E MÉTODOS, se mostraram bastante apropriadas para a utilização de ambientes computadorizados dinâmicos como ferramentas pedagógicas e matemáticas. Um aspecto importante é que tais orientações são genéricas, não são restritas aos *applets* utilizados, nem ao tópico matemático, números reais. A princípio, podem ser aplicadas com *applets* de modo geral. Essa observação se torna mais relevante quando nos damos conta da enorme oferta de *applets* existente na internet. O professor interessado em utilizar mais dessas ferramentas pode muito bem reproduzir as orientações apresentadas aqui para decidir sobre o potencial didático de um determinado *applet* eventualmente encontrado e para criar sequências didáticas que permitam uma boa exploração didática de tal *applet* encontrado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arcavi, A.; & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5(1), 25-45.

Barbosa, A. (2012). Pesquisa sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação no Brasil: tic educação 2011. São Paulo: Comitê Gestor da Internet no Brasil.

Barbosa, A. (2014). Pesquisa sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação nas escolas brasileiras: tic educação 2013. São Paulo: Comitê Gestor da Internet no Brasil.

Brandão, P. C. R. (2005). O uso de novas tecnologias e software educacional na formação inicial do professor de matemática: uma análise dos cursos de licenciatura em matemática do estado de Mato Grosso do Sul. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

Duval, R. (2003). Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In Machado, S. (Org.) Aprendizagem em Matemática, Registros de Representação Semiótica. Campinas: Papirus. pp. 11-33.

Gomes, M. L. M.; &Vieira, G. M. (2014). Livros didáticos e formação de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Educar em Revista, Curitiba, 30(54), 257-274. Disponível em: https://revistas.ufpr.br/educar/article/view/34325. Acesso em 09 de julho de 2021. https://doi.org/10.1590/0104-4060.34325.

González-Martín, A. S.; Giraldo, V.; & Souto, A. M. (2013). The introduction of real numbers in secondary education: an institutional analysis of textbooks. Research in Mathematics Education, 15(3), 230-248.

Paranhos, L. R. L. (2005). Da Possibilidade para o Real: uma pesquisa-ação sobre a formação de professores reflexivos e autônomos na utilização da informática na educação. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

Ripoll, C.; Rangel, L.; & Giraldo, V. (2016). Livro do professor de Matemática na educação básica: números inteiros. Rio de Janeiro: SBM.

Índice Remissivo

A

avaliações, 9, 40, 41, 42

C

Colégio de Aplicação, 7, 8, 9, 28, 32, 35, 43
Colégio de Aplicação da UFRJ, 32, 43

D

dobraduras, 6, 8, 11, 20, 21, 23

E

ensino remoto emergencial, 28, 29, 31, 32, 36, 40, 42

G

Geogebra, 20, 22, 23, 25
geometrias não euclidianas, 9, 44, 47, 54, 55

I

interdisciplinaridade, 34, 39, 60

L

lógicas do conhecimento, 47

P

pandemia, 4, 5, 8, 9, 11, 12, 18, 24, 26, 28, 29, 36, 40, 42, 44, 45, 54
pensamento científico, 4, 9, 44, 45, 47, 54, 55, 61

R

representação matemática, 55

S

simetria axial, 8, 13, 15, 20, 21, 22, 23

Autores

Ana Maria Martensen Roland Kaleff

Professora titular aposentada da Universidade Federal Fluminense (UFF). Doutora em Educação e Mestre em Matemática pela UFF. Licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Campinas. Foi fundadora e coordenadora do Laboratório de Ensino de Geometria (LEG/UFF) e do Curso de Especialização em Matemática para Professores do Ensino Fundamental e Médio (UFF). Foi coordenadora de disciplinas do Curso de Especialização a Distância Novas Tecnologias em Ensino de Matemática (NTEM/UFF) da Universidade Aberta do Brasil e professora do Curso de Mestrado Profissional em Diversidade e Inclusão do Instituto de Biologia (UFF).

Darling Domingos Arquieres

Professora da Rede Estadual de Educação - SEEDUC RJ, regente em matemática desde de 2005. Mestre em Educação em Ciências e Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática - PPGEduCIMAT pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ (2019). Especialista em Educação Matemática pela PUC-RJ (2002), Especialista em Novas Tecnologias no Ensino de Matemática pela Universidade Federal Fluminense - UFF (2014). Graduado com bacharelado e bacharelado em Matemática pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ (2001). Colaboradora do Projeto Laboratório de Matemática Sustentável, onde estudou o papel do uso de objetos específicos de aprendizagem na melhoria do ensino de Matemática (2015). Desde 2005 sou professor da rede estadual do RJ. De 2018 a 2021 atuei como professora convidada na Pós-Graduação Lato Sensu em Educação Matemática e suas Aplicações no Ensino da Universidade Castelo Branco.

Daniela Mendes Vieira da Silva

Doutora pelo programa de pós graduação em Ensino de Matemática da UFRJ (PEMAT-UFRJ), mestra pelo programa de pós graduação em Educação em Ciências e Matemática da UFRRJ (PPGEDUCIMAT_UFRRJ), graduada em Matemática-Licenciatura Plena pelo CEDERJ/UFF. Possuo também atualização em Mídias na Educação pela UFRJ e especialização em Educação Tecnológica pelo CEFET-RJ. Sou professora adjunta na Faculdade de Formação de Professores da UERJ, onde atuo nas licenciaturas em Matemática e Pedagogia e no Programa de Pós Graduação em Matemática (PROFMAT). Sou também pesquisadora associada no grupo de pesquisa do Instituto de Matemática da UFRJ: TIME (Tecnologias, Inclusão, Matemática e Ensino).

Lattes **Ion Moutinho Gonçalves**

Matemático, bacharelado em Matemática (1989) na Universidade Federal Fluminense (UFF). Mestre (1991) em Matemática pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Doutor (2006) em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR). Pós – Doutorado (2018) em Educação Matemática desenvolvido na Simon Fraser University (SFU). Realizou pesquisas na área de Geometria Diferencial e, atualmente, faz pesquisas a respeito do conhecimento especializado do professor de Matemática. Tem grande interesse no desenvolvimento de estratégias e materiais didáticos que possam ser utilizados por professores que ensinam Matemática. Contato: 21 - 99442 4403, e-mail: ion.moutinho@gmail.com

Lattes **Fernando Celso Villar Marinho**

Professor Titular da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), coordenador do projeto de Desenvolvimento de Jogos Digitais na Educação, licenciado em Matemática (2000) na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Mestre (2005) em Ciências pelo Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Doutor (2014) em Educação em Ciências e Saúde pelo Instituto Nutes de Educação em Ciências e Saúde (NUTES) da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Premiado no concurso Inovapps 2015 com o jogo Primogo, autor das séries de TV Os Exploradores de Kuont, Matemática em Toda Parte 2. Desenvolveu e coordenou projetos junto ao Ministério da Educação (MEC), SEEDUC/RJ, CESGRANRIO, FIRJAN e TV ESCOLA, produzindo materiais digitais e recursos tecnológicos. Avaliador no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e no Banco Nacional de Itens do INEP. Entusiasta do uso de tecnologias na educação e 'aprendedor' apaixonado pelo conhecimento, está sempre em busca de soluções criativas e de impacto para muitas pessoas. Contato:@professorfernandovillar, e-mail: fernandovillar@ufrj.br

Organizadores

André Luiz Souza Silva

Licenciado em Matemática (2004) e Especialista em Ensino de Matemática (2008) pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Mestre em Ensino de Ciências e Matemática (2010) pelo Centro Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Rio de Janeiro (CEFET-RJ), Especialista em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática (2010) pela Universidade Federal Fluminense (UFF). e-mail: andre.luiz@ifrj.edu.br.

José Carlos Gonçalves Gaspar

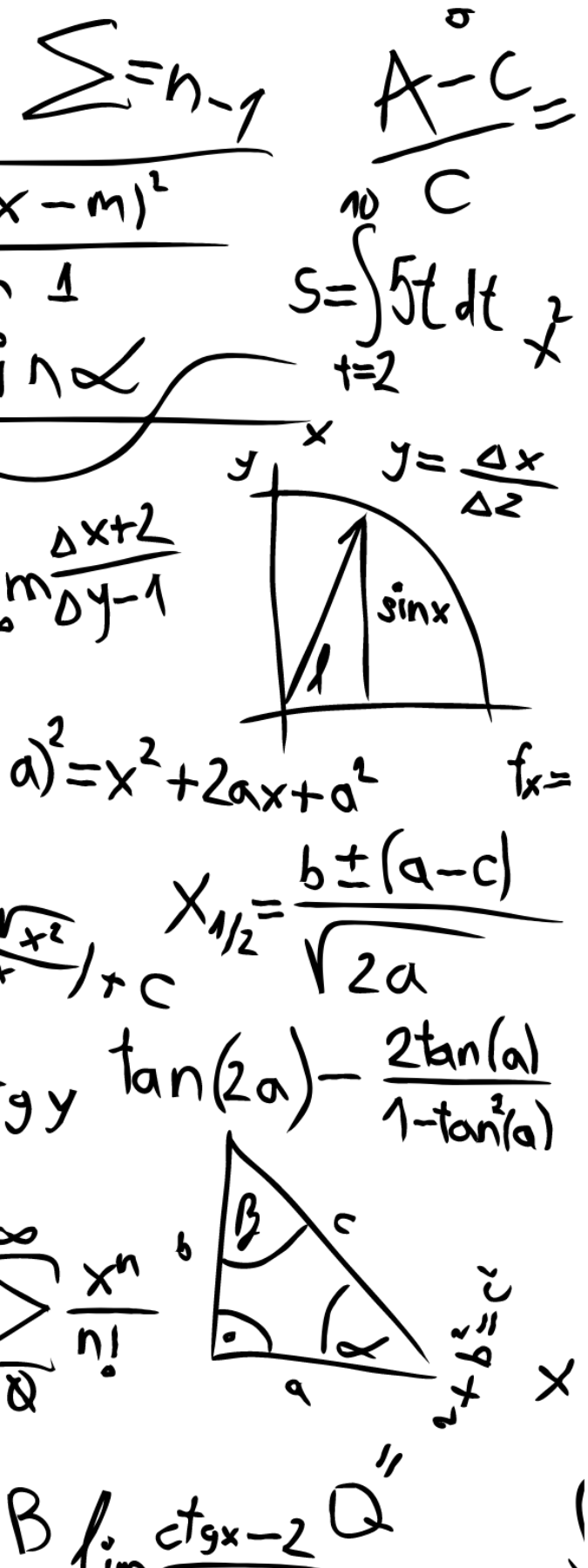
Mestre em Ensino de Ciências na Educação Básica pela Universidade do Grande Rio (Unigranrio), Especialista e Licenciado em Matemática pela UFF. Professor de Matemática na Educação Básica e Superior do IFRJ e da rede Municipal de Duque de Caxias. Membro do Projeto ConSeguir e um dos redatores da reestruturação curricular da rede municipal de Duque de Caxias (2019-2022). Autor de Materiais Didáticos pela Somos Educação e Editora Poliedro. Possui experiência em avaliação em larga escala e com Educação a Distância. Membro atuante do Laboratório de Ensino de Matemática (LabEM-IFRJ). Contato:(21) 99881-2933, e-mail:jose.gaspar@ifrj.edu.br.

Vilmar Gomes da Fonseca

Licenciado em Matemática e Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, Doutor em Educação na especialidade de Didática da Matemática pela Universidade de Lisboa. Professor do IFRJ-campus Nilópolis. Tem experiência em pesquisa e extensão na área de Matemática atuando principalmente nos campos: ensino e aprendizagem da Matemática, formação de professores, tecnologias educacionais e avaliação educacional. É coordenador de área do núcleo do PIBID da Licenciatura em Matemática do IFRJ-campus Nilópolis (2020 - 2022). Membro atuante do Laboratório de Ensino de Matemática (LabEM-IFRJ). e-mail: vilmar.fonseca@ifrj.edu.br

Marcelo Silva Bastos

Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRJ. Mestre em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio). Especialista em "Ensino de Matemática para Professores do Ensino Fundamental e Ensino Médio" pela UFF. Licenciado em Matemática pela UFRRJ. Docente do IFRJ-Campus Nilópolis atuando no Ensino Médio Técnico e no Curso de Licenciatura em Matemática. Coordenador do Laboratório de Ensino de Matemática (LabEM-IFRJ)



Pantanal Editora
Rua Abaete, 83, Sala B, Centro. CEP: 78690-000
Nova Xavantina – Mato Grosso – Brasil
Telefone (66) 99682-4165 (Whatsapp)
https://www.editorapantanal.com.br
contato@editorapantanal.com.br