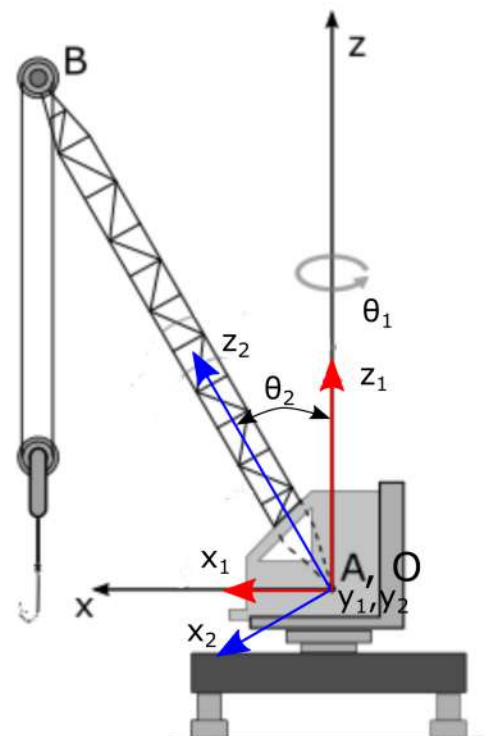
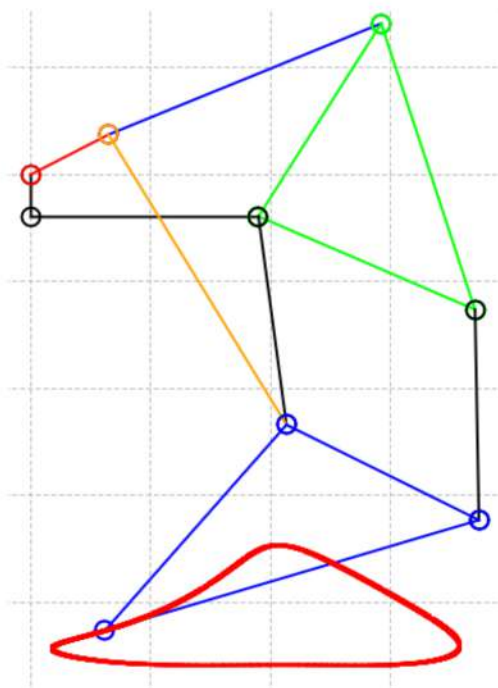
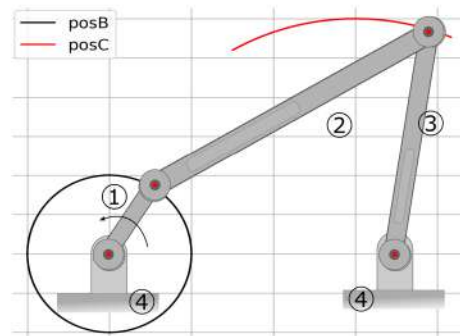
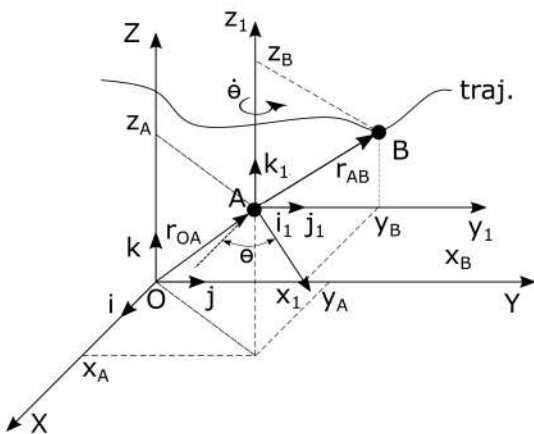


Felipe Rodrigues de Freitas Neto

Cinemática de Mecanismos

Uma abordagem matricial com
implementação em Python



Felipe Rodrigues de Freitas Neto

Cinemática de Mecanismos: Uma abordagem matricial com implementação em Python



Pantanal Editora

2023

Copyright© Pantanal Editora

Editor Chefe: Prof. Dr. Alan Mario Zuffo

Editores Executivos: Prof. Dr. Jorge González Aguilera e Prof. Dr. Bruno Rodrigues de Oliveira

Diagramação: A editora e autor. **Diagramação e Arte:** A editora e autor. **Imagens de capa e contracapa:** O autor. **Revisão:** O(s) autor(es), organizador(es) e a editora.

Conselho Editorial

Grau acadêmico e Nome	Instituição
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos	OAB/PB
Profa. MSc. Adriana Flávia Neu	Mun. Faxinal Soturno e Tupanciretã
Profa. Dra. Albys Ferrer Dubois	UO (Cuba)
Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior	IF SUDESTE MG
Profa. MSc. Aris Verdecia Peña	Facultad de Medicina (Cuba)
Profa. Arisleidis Chapman Verdecia	ISCM (Cuba)
Prof. Dr. Arinaldo Pereira da Silva	UFESSPA
Prof. Dr. Bruno Gomes de Araújo	UEA
Prof. Dr. Caio Cesar Enside de Abreu	UNEMAT
Prof. Dr. Carlos Nick	UFV
Prof. Dr. Claudio Silveira Maia	AJES
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos	UFGD
Prof. Dr. Cristiano Pereira da Silva	UEMS
Profa. Ma. Dayse Rodrigues dos Santos	IFPA
Prof. MSc. David Chacon Alvarez	UNICENTRO
Prof. Dr. Denis Silva Nogueira	IFMT
Profa. Dra. Denise Silva Nogueira	UFMG
Profa. Dra. Dennyura Oliveira Galvão	URCA
Prof. Dr. Elias Rocha Gonçalves	ISEPAM-FAETEC
Prof. Me. Ernane Rosa Martins	IFG
Prof. Dr. Fábio Steiner	UEMS
Prof. Dr. Fabiano dos Santos Souza	UFF
Prof. Dr. Gabriel Andres Tafur Gomez	(Colômbia)
Prof. Dr. Hebert Hernán Soto Gonzáles	UNAM (Peru)
Prof. Dr. Hudson do Vale de Oliveira	IFRR
Prof. MSc. Javier Revilla Armesto	UCG (México)
Prof. MSc. João Camilo Sevilla	Rede Municipal de Niterói (RJ)
Prof. Dr. José Luis Soto Gonzales	UNMSM (Peru)
Prof. Dr. Julio Cezar Uzinski	UFMT
Prof. MSc. Lucas R. Oliveira	Mun. de Chap. do Sul
Profa. Dra. Keyla Christina Almeida Portela	IFPR
Prof. Dr. Leandro Argente-Martínez	Tec-NM (México)
Profa. MSc. Lidiene Jaqueline de Souza Costa Marchesan	Consultório em Santa Maria
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann	UFJF
Prof. MSc. Marcos Pisarski Júnior	UEG
Prof. Dr. Marcos Pereira dos Santos	FAQ
Prof. Dr. Mario Rodrigo Esparza Mantilla	UNAM (Peru)
Profa. MSc. Mary Jose Almeida Pereira	SEDUC/PA
Profa. MSc. Núbia Flávia Oliveira Mendes	IFB
Profa. MSc. Nila Luciana Vilhena Madureira	IFPA
Profa. Dra. Patrícia Maurer	UNIPAMPA
Profa. Dra. Queila Pahim da Silva	IFB
Prof. Dr. Rafael Chapman Auty	UO (Cuba)
Prof. Dr. Rafael Felipe Ratke	UFMS
Prof. Dr. Raphael Reis da Silva	UFPI
Prof. Dr. Renato Jaqueto Goes	UFG
Prof. Dr. Ricardo Alves de Araújo (In Memoriam)	UEMA
Profa. Dra. Sylvana Karla da Silva de Lemos Santos	IFB
MSc. Tayronne de Almeida Rodrigues	
Prof. Dr. Wéverson Lima Fonseca	UFPI
Prof. MSc. Wesclen Vilar Nogueira	FURG
Profa. Dra. Yilan Fung Boix	UO (Cuba)
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme	UFT

Conselho Técnico Científico

- Esp. Joacir Mário Zuffo Júnior
- Esp. Maurício Amormino Júnior
- Lda. Rosalina Eufrausino Lustosa Zuffo

Ficha Catalográfica

Catálogo na publicação
Elaborada por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

F866c

Freitas Neto, Felipe Rodrigues de

Cinemática de Mecanismos: uma abordagem matricial com implementação em Python / Felipe Rodrigues de Freitas Neto. – Nova Xavantina-MT: Pantanal, 2023. 119p. ; il.

Livro em PDF

ISBN 978-65-85756-15-0

DOI <https://doi.org/10.46420/9786585756150>

1. Mecânica sólida. 2. Cinemática. I. Freitas Neto, Felipe Rodrigues de. II. Título.

CDD 531

Índice para catálogo sistemático

I. Mecânica sólida

Nossos e-books são de acesso público e gratuito e seu download e compartilhamento são permitidos, mas solicitamos que sejam dados os devidos créditos à Pantanal Editora e também aos organizadores e autores. Entretanto, não é permitida a utilização dos e-books para fins comerciais, exceto com autorização expressa dos autores com a concordância da Pantanal Editora.

Pantanal Editora Rua Abaete, 83, Sala B, Centro. CEP: 78690-000. Nova Xavantina – Mato Grosso – Brasil. Telefone (66) 99682-4165 (Whatsapp). <https://www.editorapantanal.com.br> contato@editorapantanal.com.br

Agradecimentos

Agradeço a toda minha família pelo apoio incondicional em todos os momentos da minha vida.

Agradeço a minha querida esposa Ayla Suzy R. de Lima, que sempre me apoia em todos os meus planos e objetivos.

Agradeço a Wallace M. Bessa que em tempos passados me transmitiu o conhecimento que permitiu a elaboração deste livro.

Agradeço a Fernando Luiz S. Palha pelas contribuições e principalmente por transformar simples rabiscos em desenhos dos mecanismos.

Por último, agradeço ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), instituição onde trabalho, e a Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), minha *Alma mater*.

Sumário

Agradecimentos	iv
Sumário	v
1 Introdução	6
1.1 Alguns exemplos de mecanismos	7
1.1.1 Biela-manivela	7
1.1.2 Garfo escocês	8
1.1.3 Mecanismos de retorno rápido	8
1.1.4 Mecanismo de quatro barras	9
1.1.5 Manipuladores robóticos	10
1.2 Cadeias cinemáticas aberta e fechada	11
1.3 Juntas articuladas	13
1.4 Mobilidade	13
2 Cinemática	16
2.1 Sistema de Referência Inercial	16
Posição	17
2.1.1 Velocidade	17
2.1.2 Aceleração	17
2.2 Sistema de Referência Móvel	18
2.2.1 Referencial móvel em translação	18
2.2.2 Referencial móvel em rotação	21
2.2.3 Rotações no plano e no espaço	28
2.3 Exemplos Aplicados	31
2.3.1 Biela-manivela	31
2.3.2 Garfo escocês	40
2.3.3 Mecanismo de retorno rápido	47
2.3.4 Mecanismo de quatro barras	62
2.3.5 Manipulador robótico RP	80
2.3.6 Manipulador robótico RRR (2D)	87
2.3.7 Guindaste	106
2.4 Exemplos propostos	116
Referências Bibliográficas	117
Índice Remissivo	118
Sobre o autor	119

1 Introdução

O estudo do movimento de objetos, animais, pessoas e corpos celestes sempre chamou a atenção de inúmeros pensadores em todo o mundo, muito antes da mítica maçã supostamente cair na cabeça de *sir*. Isaac Newton e ele formular o que mais tarde tornou-se a base para a engenharia moderna. Segundo Flores and Claro (2005) o estudo do movimento fica completamente definido pelo conhecimento de sua cinemática e dinâmica, ou seja, pelo conhecimento da posição, da Velocidade, da aceleração, das forças e momentos que um determinado corpo está sujeito.

Quando ligamos diferentes corpos por juntas (ou articulações) formamos um sistema articulado, e se este possuir como finalidade transmitir movimento, podemos chamar esse sistema articulado de *Mecanismo*. Mabie and Ocvirk (1980) definem Mecanismo como uma combinação de corpos rígidos, ligados de tal modo que movem-se com movimento relativo definido. Eles, assim como outros autores, procuram sempre diferenciar os *Mecanismos* das *Máquinas*. Máquinas possui uma definição diferente, podendo estas serem um mecanismo ou um conjunto de mecanismos que possuem uma funcionalidade específica, como por exemplo um motor de combustão interna (máquina térmica) ou uma máquina de prensar chapas metálicas. Flores (2012) cita que as Máquinas tem como principal propósito transmitir ou transformar força, energia ou potência para determinada finalidade. Já os Mecanismos possuem o propósito de transmitir ou transformar um determinado movimento.

Diferentes configurações de mecanismos são estudadas nos mais diversos cursos de engenharia. Existem diversas formas de analisar esses mecanismos, com o objetivo de obter a descrição da Mecanismos, Velocidade e aceleração de pontos específicos. Entre as diferentes abordagens, podemos citar as abordagens gráfica, algébrica, vetorial e matricial.

A abordagem com vetores e matrizes é a mais contemporânea e seu uso facilita a implementação numérica da análise ou síntese de mecanismos. Santos (2001) em seu livro *Dinâmica de Sistemas Mecânicos*, apresenta uma excelente base matemática da abordagem com vetores e matrizes e à aplica a alguns sistemas dinâmicos. Diante da necessidade de aplicar esta metodologia a mecanismos tradicionalmente estudados e usados na Engenharia Mecânica, o presente trabalho foi pensado e elaborado. Nele, a cinemática de mecanismos como o Biela-Manivela, o Retorno Rápido, o Quatro barras, entre outros, é obtida usando vetores e matrizes e sua implementação numérica é realizada com a linguagem de programação Python. O objetivo é

fornecer um material didático que possa ser utilizado de forma multidisciplinar em cursos de engenharia. Nas seções seguintes deste capítulo serão apresentados alguns mecanismo clássicos na engenharia e conceitos básicos necessários ao estudo dos Mecanismos.

1.1 Alguns exemplos de mecanismos

As subseções seguintes conduzem a uma apresentação dos principais mecanismos articulados usados na Engenharia Mecânica, desde tempos remotos, e cuja aplicação ainda é presente nos dias atuais.

1.1.1 *Biela-manivela*

O mecanismo conhecido como Biela-Manivela ou Cursor-Manivela talvez seja o mais famoso mecanismo na Engenharia Mecânica, devido ao seu histórico emprego em motores de combustão interna e em compressores de ar. Ele é apresentado na figura 1.1 tanto como desenho esquemático, quanto como foto. Este mecanismo possui a seguinte configuração: corpo I - Manivela, corpo II - Biela, corpo III - Pistão e corpo IV - a base de fixação. Dependendo da aplicação podemos ter um torque de saída ou um torque de entrada na manivela. Em motores de combustão interna os vapores dos gases de combustão empurram o pistão, que transmite o movimento para a manivela através da biela. E neste caso, como resultado temos um torque de saída que vai ser responsável pela locomoção do automotor. Os compressores de ar a pistão funcionam no sentido oposto. Um motor elétrico é responsável pelo torque de entrada na manivela, que transmite o movimento ao pistão por intermédio da biela. E por fim, o pistão comprime o ar.

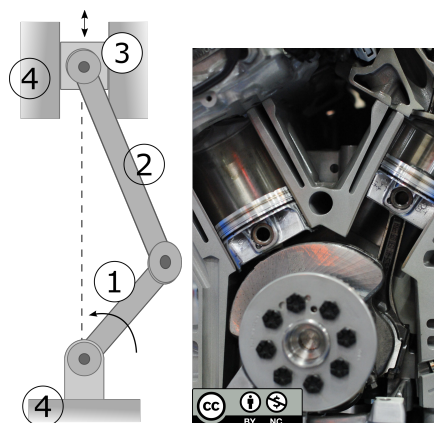


Figura 1.1. Mecanismo Biela-Manivela

1.1.2 *Garfo escocês*

O garfo escocês (figuras 1.2 e 1.3) é um mecanismo muito útil quando se deseja transformar um movimento rotativo em um movimento oscilatório harmônico. Sua configuração é: barra 1 - manivela, barra 2 - um elemento com um rasgo e barra 3 - base de fixação. Alguns autores consideram uma quarta barra, como sendo o pino existente na articulação entre os corpos 1 e 2. Este pino possui seu movimento limitado a um deslizamento dentro do rasgo. O movimento é bastante intuitivo de se imaginar quando observamos as figuras 1.2 e 1.3. A manivela é acionada por um eixo rotativo, possivelmente de um motor elétrico, então transmite um movimento ao elemento 2, através de uma junta na extremidade do corpo 1 e limitada pelo rasgo do corpo 2. O corpo 2 desliza em uma junta linear em 3. No final, o movimento original de rotação do eixo é transformado em um movimento oscilatório linear da barra 2.

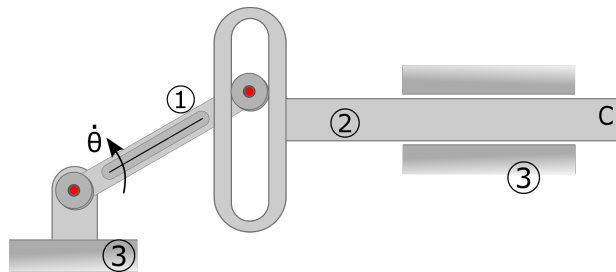


Figura 1.2. Garfo Escocês. Fonte: Autor.

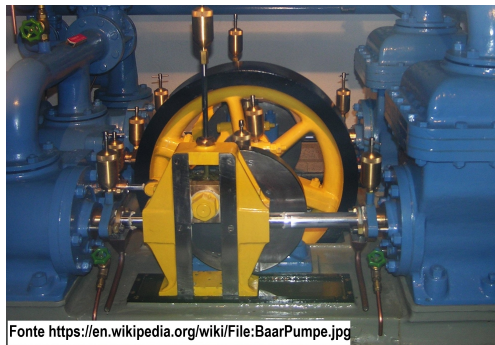


Figura 1.3. Garfo Escocês. Fonte: <https://commons.wikimedia.org/>

1.1.3 *Mecanismos de retorno rápido*

Existem diversos mecanismos que podem entrar nos chamados mecanismos de retorno rápido. Estes como o próprio nome sugere, possuem uma Velocidade de retorno maior do que a Velocidade de avanço. Talvez o exemplo mais simbólico seja a aplicação na máquina ferramenta conhecida como Plaina Limadora. Esta máquina é utilizada para retirar material no

processo de usinagem. A retirada de material ocorre de forma lenta, uma restrição necessária pela própria natureza do processo de usinagem. No entanto, após a retirada do material não há necessidade da máquina retornar com a mesma Velocidade de operação de sua ida e por este motivo é interessante que seu retorno seja rápido, tornando mais ágil o processo. Daí surgiram diversos mecanismos que proporcionaram uma ida lenta e um retorno rápido dos cabeçotes dessas máquinas ferramentas. Nas figuras 1.4 e 1.5 são apresentadas a diagramação de um mecanismo de retorno rápido e uma foto de uma Plaina.

O mecanismo apresentado nas figuras 1.4 e 1.5 possui a seguinte configuração: corpo 1 - manivela, corpo 2 - barra oscilante com rasgo, corpo 3 - base de fixação, corpo 4 - elemento deslizante.

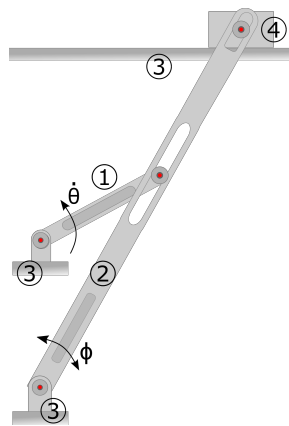


Figura 1.4. Mecanismos de retorno rápido e Plaina limadora. Fonte: Autor.



Figura 1.5. Mecanismos de retorno rápido e Plaina limadora.
Fonte: <https://labman.ct.ufrn.br/>

1.1.4 *Mecanismo de quatro barras*

O mecanismo de quatro barras, apresentado na Figura 1.6, é um sistema articulado formado por quatro elementos de barras. Em uma de suas configurações, voltadas para o trabalho

contínuo, ele tem a função de converter um movimento rotativo da manivela (corpo 1) em um movimento oscilatório do corpo 3, também chamado de *oscilador* ou ainda *manivela de saída*. O corpo 2 é muitas vezes chamado de elo de ligação ou de biela. Também é comum observar esse mesmo mecanismo em situações em que a manivela não realiza uma rotação completa. Para garantir que pelo menos uma das barras seja capaz de realizar uma volta completa em torno de seu eixo de referência, a condição de *Grashof* deve ser verificada.

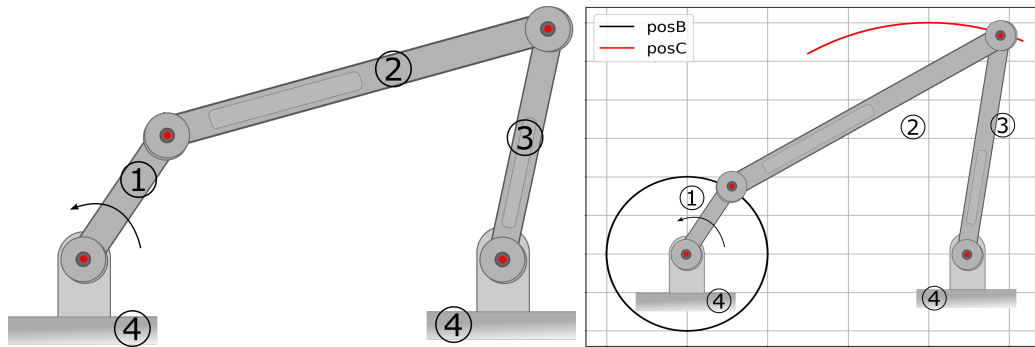


Figura 1.6. Mecanismo de quatro barras. Fonte: Autor.

A condição de Grashof é uma relação que prevê a condição de rotatividade do mecanismo de quatro barras com base no comprimento dos elos (Norton, 2010). Seja L_{maior} o maior elo, L_{menor} o menor elo, L_i e L_j os elos restantes, a condição de Grashof determina que

$$L_{maior} + L_{menor} \leq L_i + L_j$$

Então se a condição acima for satisfeita, pelo menos uma das barras é capaz de realizar uma rotação completa. Se a condição for falsa, nenhuma barra será capaz de girar totalmente em torno do eixo de referência.

Esse mecanismo está muito presente no nosso dia a dia, podemos observar mecanismos de quatro barras em suspensões automotivas e de bicicletas esportivas, retro escavadeiras, para-brisas de carros, garras robóticas, unidades de bombeio de petróleo, entre outras aplicações cotidianas. Na figura 1.7 são apresentadas algumas dessas aplicações. O mecanismo de quatro barras também é encontrado nas artes, como as *Strandbeest* (Figuras 1.8 e 1.9), que são esculturas cinéticas do físico e artista plástico Jansen (2022).

1.1.5 Manipuladores robóticos

Os manipuladores robóticos são máquinas compostas por membros ligados por juntas em uma cadeia cinemática aberta, e sua principal função é a de manipular materiais sem o contato

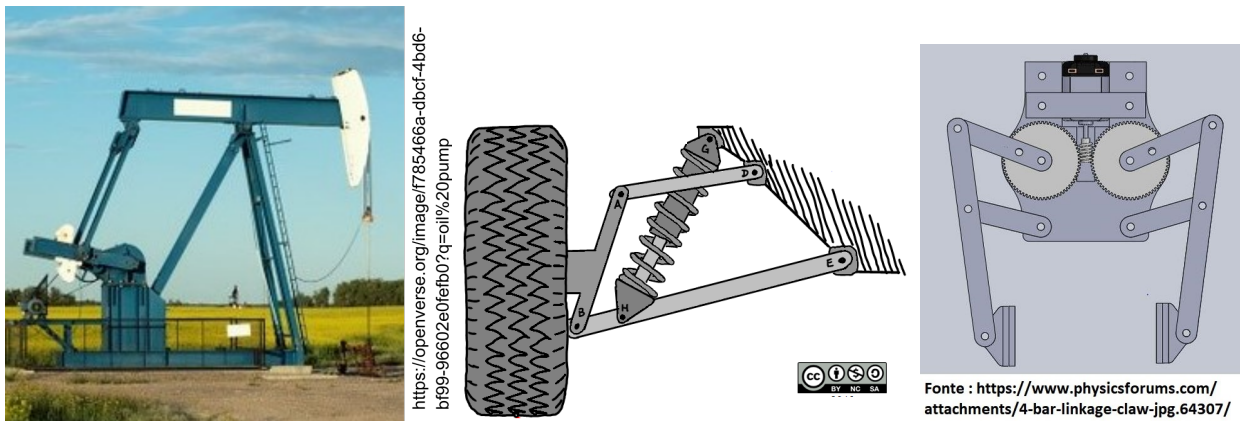


Figura 1.7. Exemplos de uso do mecanismo de quatro barras.



Figura 1.8. Mecanismo de quatro barras em estruturas cinéticas de Theo Jansen. Fonte: www.artfutura.org/.

físico direto do operador. Este tipo de mecanismo é muito utilizado no ambiente industrial e seu uso está crescendo aceleradamente conforme mais empresas investem em automatizar seus processos. Podemos encontrar manipuladores robóticos utilizados em indústrias como a automobilística, metalúrgica, em aplicações espaciais e até mesmo auxiliando em cirurgias. Nas figuras 1.10 e 1.11 é apresentado um esquema de um manipulador robótico e uma foto de uma aplicação industrial.

1.2 Cadeias cinemáticas aberta e fechada

Cadeia cinemática é o conjunto formado por elos ou corpos interligados e que estejam livre para realizar algum movimento, de modo que, dado um movimento de entrada obtemos um movimento de saída controlado. Caso o sistema de corpos interligados não possa realizar movimento, este sistema é chamado de *Estrutura*. As cadeias cinemáticas pode ser do tipo aberta, fechada ou híbrida.

Cadeias cinemáticas abertas recebe a denominação de estrutura serial, e as cadeias cine-

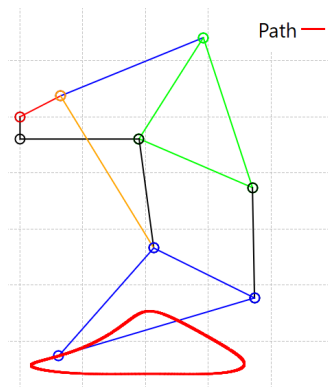


Figura 1.9. Mecanismo de quatro barras em estruturas cinéticas de Theo Jansen. Fonte: Autor.

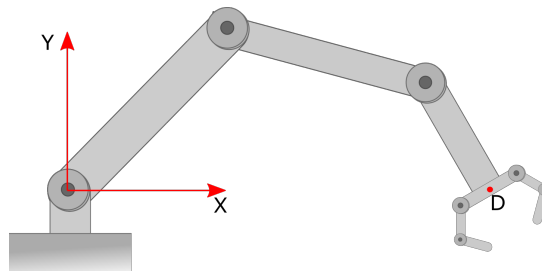


Figura 1.10. Manipulador Robótico. Fonte: Autor.

máticas fechadas são denominadas de estruturas paralelas. No caso de a estrutura possuir cadeias cinemáticas abertas e fechadas, ela é denominada cadeia cinemática híbrida (Carvalho et al., 2018). Na figura 1.12 são apresentados exemplos de mecanismos com cadeias cinemáticas aberta e fechada.

Em uma cadeia cinemática *Aberta*, ao se partir de uma elo em direção a outro elo, só é possível voltar ao elo inicial através do mesmo caminho, só que em sentido oposto. Na cadeia cinemática *Fechada*, é possível sair de um elo do mecanismo e chegar a ele passando por outro caminho.

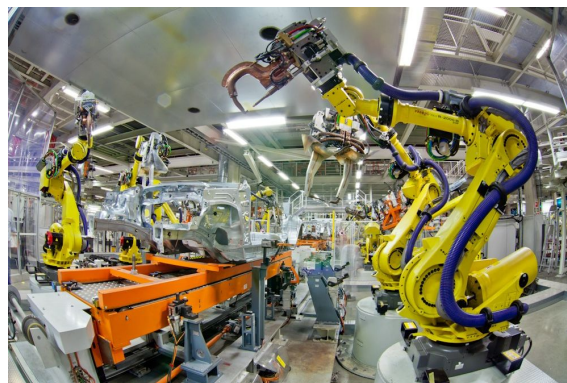


Figura 1.11. Manipulador Robótico. Fonte: <https://roboticsandautomationnews.com>

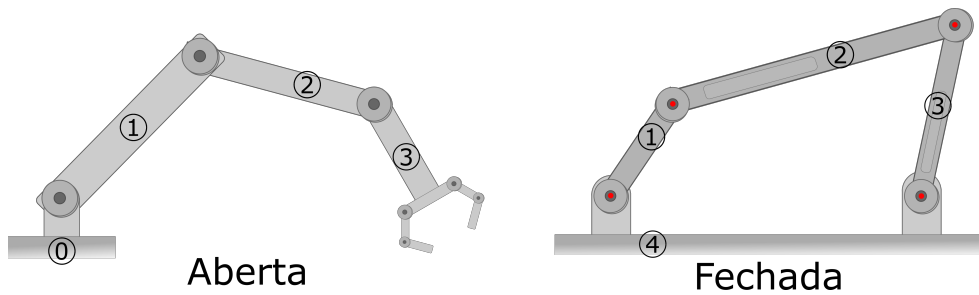


Figura 1.12. Cadeias cinemáticas

1.3 Juntas articuladas

Segundo Norton (2010), Junta é uma conexão entre dois ou mais elos que permite o mesmo movimento entre os elos conectados. As juntas também são chamadas de pares cinemáticos ou articulações. Nas figuras 1.13, 1.14 e 1.15 são apresentados exemplos dos tipos mais comuns de juntas.

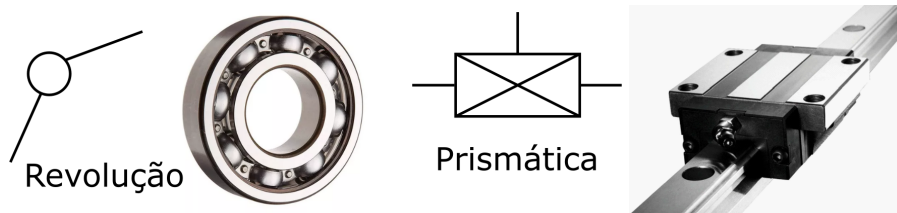


Figura 1.13. Juntas de Revolução (R) e Prismática (P). Fonte: Autor.

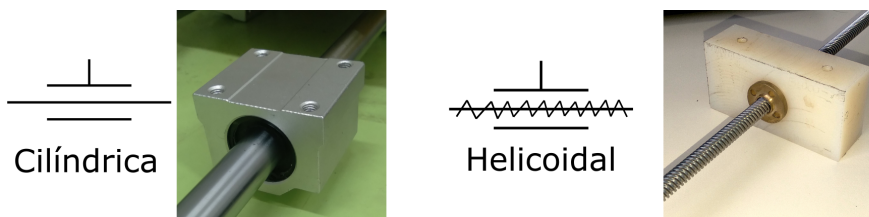


Figura 1.14. Junta Cilíndrica (C) e Helicoidal (H). Fonte: Autor.

Na tabela 1.1 são apresentados os símbolos, os deslocamentos permitidos e o n° de graus de liberdade de cada juntas cinemática apresentada.

1.4 Mobilidade

Quando estamos falando de mecanismos ou sistemas articulados, estamos falando de corpos rígidos ligados entre si por intermédio de juntas cinemáticas. Estas juntas cinemáticas impõe

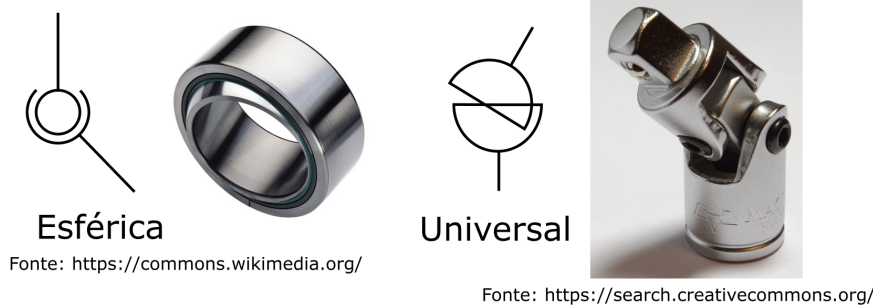


Figura 1.15. Junta Esférica (S) e Universal (U)

Articulação ou par cinemático	Símbolo	Deslocamentos permitidos	Nº de graus de liberdade
De Revolução	R	1 deslocamento angular	1
Prismática	P	1 deslocamento linear	1
Cilíndrica	C	1 deslocamento angular e 1 deslocamento linear	2
Helicoidal	H	1 deslocamento angular dependente do linear	1
Esférica	S	3 deslocamentos angulares	3
Cardã ou Universal	U	2 deslocamentos angulares	2

Tabela 1.1. Juntas cinemáticas

restrições físicas a esses sistemas articulados e limitam sua mobilidade. A mobilidade é representada pelo índice de mobilidade (M) e pode ser interpretada como o grau de liberdade do mecanismo. O índice M pode ser calculado utilizando o critério de Kutzbach-Gruebler, definido na equação 1.

$$M = \lambda(Ne - 1) - \sum_{j=1}^{\lambda-1} (\lambda - j) n_j \quad (1)$$

onde, (M) é a Mobilidade, λ é um índice associado ao espaço de movimentação do mecanismo, (Ne) é o Número total de elos e (Nj) é o número de articulações que permitem j graus de liberdade.

- Para um espaço bidimensional – $\lambda = 3$
- Para um espaço tridimensional – $\lambda = 6$

O critério de Kutzbach-Gruebler só é válido se as restrições impostas pelas articulações são

independentes umas das outras e não introduz redundâncias, pois essas redundâncias podem gerar graus de liberdade passivos.

Em geral, o índice de mobilidade (M) coincide com a quantidade de atuadores necessários para a movimentação do mecanismo. Ou seja, se temos $M = 1$ é necessário um único atuador para acionar corretamente o mecanismo. Se $M = 2$, são necessários dois atuadores.

2 Cinemática

Cinemática é o ramo da dinâmica que estuda o movimento de um corpo ou partícula por aspectos geométricos, sem levar em consideração o estudo do que ocasionou o movimento. Logo, a posição, a Velocidade e a aceleração são obtidas sem levar em consideração a força resultante que provocou o movimento.

Este capítulo tem início com a definição do que é um referencial inercial, o que é um referencial móvel e como podemos transpor um vetor inicialmente representado em um referencial, para o outro. Logo após, os vetores de posição, Velocidade e aceleração são obtidos de forma plena, levando em consideração os movimentos que um corpo pode apresentar. Dando continuidade, as equações da cinemática são aplicadas a alguns mecanismos comuns na engenharia e já apresentados previamente no capítulo 1.

2.1 Sistema de Referência Inercial

Um sistema de Referência Inercial (I) é aquele que está fixo no espaço ou se movimentando com Velocidade constante. Para definirmos os vetores posição, Velocidade e aceleração, vamos inicialmente considerar uma partícula A descrevendo uma trajetória no espaço cartesiano, como apresentado na figura 2.1. Também estão representados na figura os cursores unitários $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, apontando para as direções X, Y e Z , respectivamente. O ponto O é a origem do sistema de referência inercial e x_0, y_0 e z_0 são as coordenadas do ponto A .

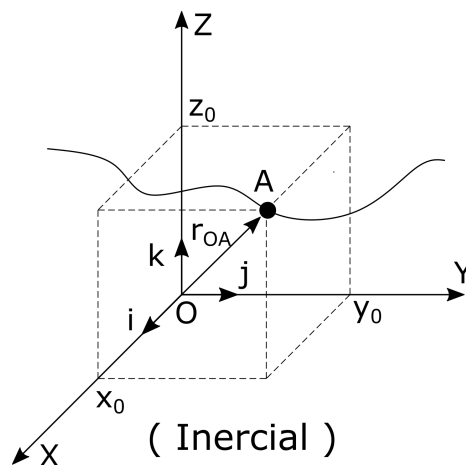


Figura 2.1. Sistema de referência inercial.

Posição

O vetor posição que sai da origem do sistema inercial até o ponto A é o vetor ${}_I\vec{r}_{OA}$. Note que o subíndice I indica que o vetor está sendo representado na base inercial. O vetor posição é então definido pela equação 2

$${}_I\vec{r}_{OA} = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k} \quad (2)$$

2.1.1 Velocidade

O vetor Velocidade do ponto A é obtido ao derivar uma vez, em função do tempo, a equação 2. É apresentado na equação 3 o passo a passo para se obter o vetor Velocidade de ponto A . Vale destacar que por se tratar de um referencial inercial, as derivadas dos cursores unitários são iguais a zero. Já que esses por definição tem módulo unitário e ao estar representados no referencial inercial não possuem variação em suas direções.

$$\begin{aligned} {}_I\vec{v}_A &= \frac{d({}_I\vec{r}_{OA})}{dt} = \frac{d}{dt} (x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}) \\ &= \frac{dx_0}{dt}\hat{i} + x_0\frac{d\hat{i}}{dt} + \frac{dy_0}{dt}\hat{j} + y_0\frac{d\hat{j}}{dt} + \frac{dz_0}{dt}\hat{k} + z_0\frac{d\hat{k}}{dt} \end{aligned} \quad (3)$$

A equação 3 torna-se então a equação 4,

$${}_I\vec{v}_A = \dot{x}_0\hat{i} + \dot{y}_0\hat{j} + \dot{z}_0\hat{k} \quad (4)$$

2.1.2 Aceleração

A aceleração do ponto A representada no referencial inercial é obtida derivando uma vez, em função do tempo, a equação 4. Como explicitado a seguir:

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{a}_A &= \frac{d({}_I\vec{v}_A)}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{x}_0\hat{i} + \dot{y}_0\hat{j} + \dot{z}_0\hat{k}) \\
 &= \frac{d\dot{x}_0}{dt}\hat{i} + \dot{x}_0\frac{d\hat{i}}{dt} + \frac{d\dot{y}_0}{dt}\hat{j} + \dot{y}_0\frac{d\hat{j}}{dt} + \frac{d\dot{z}_0}{dt}\hat{k} + \dot{z}_0\frac{d\hat{k}}{dt}
 \end{aligned} \tag{5}$$

Assim como ocorreu na Velocidade, as derivadas dos cursores unitários são iguais a zero, uma vez que esses por definição possuem módulo unitário, além de não variarem sua direção. A equação 5 torna-se então,

$${}_I\vec{a}_A = \ddot{x}_0\hat{i} + \ddot{y}_0\hat{j} + \ddot{z}_0\hat{k} \tag{6}$$

2.2 Sistema de Referência Móvel

Muitas vezes ao tentar representar um ponto qualquer de um mecanismo diretamente no referencial inercial nos deparamos com um árduo trabalho. Este trabalho pode ser simplificado se dividido em partes menores, resolvendo cada uma dessas partes separadamente e depois adicionando-as ao todo. Este simples pensamento nos permite resolver movimentos complexos de forma mais simples e natural.

Para facilitar na tarefa de dividir um problema complexo em partes simples vamos estudar a formulação matemática de vetores de posição, Velocidade e aceleração representados em sistemas de referencia móveis. Vamos então estudar o sistema móvel em translação e o sistema móvel em rotação.

2.2.1 Referencial móvel em translação

Considere uma partícula B descrevendo uma trajetória no espaço (Fig. 2.2). Vamos assumir que existe um sistema de coordenadas M , cuja origem é representada pelo ponto A , que se movimenta de tal modo que os seus cursores unitários \hat{i}_1, \hat{j}_1 e \hat{k}_1 estejam sempre paralelos aos cursores unitários do referencial Inercial \hat{i}, \hat{j} e \hat{k} , respectivamente. Dizemos então que o sistema móvel M está transladando em relação ao sistema inercial I . Deste modo, temos

$$\hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1 \equiv \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} \Rightarrow {}_M \vec{s} = \mathbf{I} \cdot {}_I \vec{s} \quad (7)$$

A equação acima transforma um vetor representado na base inercial (I) para uma base móvel (M) em translação. A matriz que é responsável por esta operação é chamada *Matriz de Transformada de Coordenadas*, e no caso específico do movimento de translação, trata-se da matriz identidade \mathbf{I} , que é constante. Para pegar um vetor inicialmente representado na base móvel (M) e representa-lo na base inercial (I), basta multiplicar a equação 7 por \mathbf{I}^{-1} à esquerda, obtendo

$${}_I \vec{s} = \mathbf{I}^{-1} \cdot {}_M \vec{s} \quad (8)$$

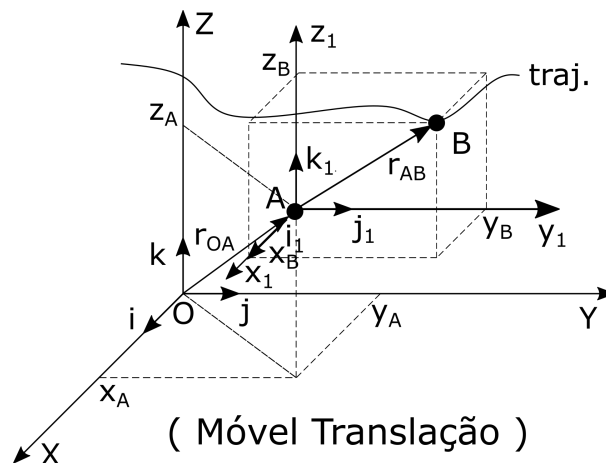


Figura 2.2. Sistema de referência móvel em translação.

Agora que definimos o que é uma matriz de transformada de coordenadas e o que ela faz, vamos obter a posição, a Velocidade e a aceleração da partícula B com relação ao referencial inercial.

Posição

A posição da partícula B, em relação a origem do referencial inercial O, é obtida pela equação 9. Os subíndices I e M , diz respeito a representação dos vetores nos referenciais inercial e móvel, respectivamente. É importante reforçar que a soma deve ser realizada com os vetores sendo representados na mesma base de referencia.

$$\begin{aligned} {}_I\vec{r}_{OB} &= {}_I\vec{r}_{OA} + {}_I\vec{r}_{AB} \\ {}_I\vec{r}_{OB} &= {}_I\vec{r}_{OA} + \mathbf{I}^{-1} \cdot {}_M\vec{r}_{AB} \end{aligned} \quad (9)$$

Devido o vetor \vec{r}_{AB} ser mais facilmente descrito na base móvel, ele é representado nesta base e depois é passado para a base Inercial com a ajuda da inversa da matriz de transformada de coordenadas \mathbf{I}^{-1} .

Velocidade

A Velocidade da partícula B é obtida derivando o vetor ${}_I\vec{r}_{OB}$ com relação ao tempo. Ao realizar a derivado o aluno deve aplicar a regra da cadeia e deve lembrar que a matriz identidade é constante, logo sua derivada é nula.

$$\begin{aligned} {}_I\vec{v}_B &= \frac{d({}_I\vec{r}_{OB})}{dt} = \frac{d}{dt} ({}_I\vec{r}_{OA} + \mathbf{I}^{-1} \cdot {}_M\vec{r}_{AB}) \\ {}_I\vec{v}_B &= \frac{d({}_I\vec{r}_{OA})}{dt} + \frac{d\mathbf{I}^{-1}}{dt} \cdot {}_M\vec{r}_{AB} + \mathbf{I}^{-1} \frac{d({}_M\vec{r}_{AB})}{dt} \\ {}_I\vec{v}_B &= {}_I\vec{v}_A + \mathbf{I} \cdot {}_M\vec{v}_{Rel} \end{aligned} \quad (10)$$

Obtemos então,

$${}_I\vec{v}_B = {}_I\vec{v}_A + {}_I\vec{v}_{Rel_{AB}} \quad (11)$$

Na equação acima ${}_I\vec{v}_A$ e ${}_I\vec{v}_B$ são os vetores Velocidade absoluta dos pontos A e B, respectivamente, representados no referencial inercial. Já o vetor ${}_I\vec{v}_{Rel_{AB}}$ é o vetor Velocidade relativa AB, representado no referencial inercial. O vetor Velocidade relativa é a taxa de variação do vetor \vec{r}_{AB} em intensidade.

Aceleração

A aceleração da partícula B é obtida derivando o vetor Velocidade ${}_I\vec{v}_B$, em relação ao tempo. Como segue na equação abaixo,

$${}_I\vec{a}_B = \frac{d({}_I\vec{v}_B)}{dt} = \frac{d}{{dt}}({}_I\vec{v}_A + \mathbf{I} \cdot_M \vec{v}_{Rel})$$

$${}_I\vec{a}_B = \frac{d({}_I\vec{v}_A)}{dt} + \frac{d\mathbf{I}}{dt} \vec{v}_{Rel_{AB}} + \mathbf{I}^{-1} \frac{d({}_M\vec{v}_{Rel})}{dt} \quad (12)$$

$${}_I\vec{a}_B = {}_I\vec{a}_A + \mathbf{I}^{-1} {}_M\vec{a}_{Rel_{AB}}$$

Obtemos então,

$${}_I\vec{a}_B = {}_I\vec{a}_A + {}_I\vec{a}_{Rel_{AB}} \quad (13)$$

2.2.2 Referencial móvel em rotação

Nesta subseção, são deduzidas as equações necessárias para transpor referenciais móveis em rotação para um sistema de referencia inercial, ou vice-versa. Diferentemente do sistema móvel em translação, no sistema móvel em rotação os cursores na base móvel e na base inercial guardam uma relação que depende do ângulo entre eles. Para obter esta relação vamos dividir o espaço em três planos, os planos XY, XZ e YZ (Fig. 2.3).

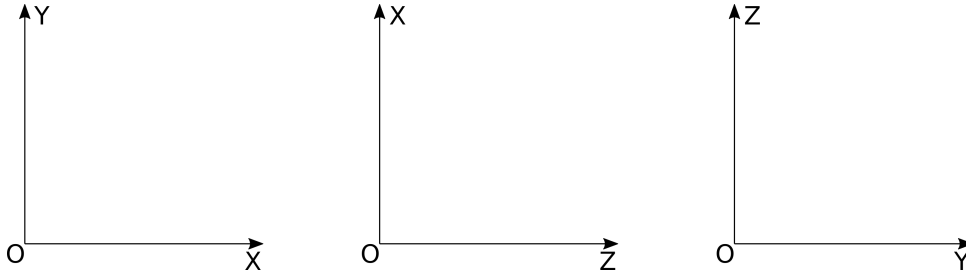


Figura 2.3. Planos XY, ZX e YZ.

Vamos inicialmente considerar o plano XY. Assumiremos que além do sistema inercial XY, também há um sistema móvel X_1Y_1 , e que este sistema móvel pode rotacionar em torno do eixo Z no sentido positivo, de acordo com a regra da mão direita (sentido dextrogiro), como apresentado na figura 2.4. O eixo Z por sua vez está localizado no ponto O, que é a origem do sistema de referência inercial XY.

Os vetores de Velocidade e aceleração angulares são escritos como,

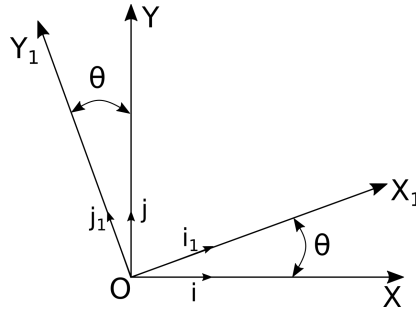


Figura 2.4. Rotação em torno do eixo Z.

$${}_I\tilde{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad {}_I\tilde{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

Projetando os cursores da base móvel sobre a base inercial, temos

$$\begin{aligned} \hat{i}_1 &= \cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j} + 0\hat{k} \\ \hat{j}_1 &= -\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j} + 0\hat{k} \\ \hat{k}_1 &= 0\hat{i} + 0\hat{j} + 1\hat{k} \end{aligned} \quad (14)$$

Colocando o sistema da equação 14 na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad {}_M\vec{s} = T_\theta \cdot {}_I\vec{s} \quad (15)$$

O plano XZ é apresentado na figura 2.5, e é feita uma análise semelhante a anterior. Neste caso, o sistema móvel X_1Z_1 realiza uma rotação positiva em torno do eixo Y. O eixo Y_1 é paralelo ao eixo Y e as origens do sistema móvel e inercial coincidem. Os vetores de Velocidades e aceleração angulares são escritos como,

$${}_I\tilde{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}_I\tilde{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\theta}(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

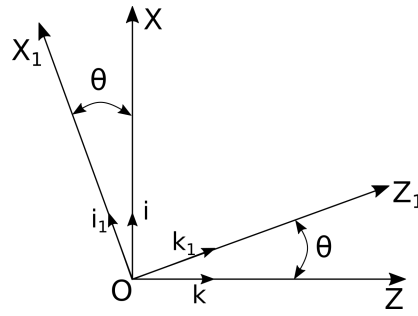


Figura 2.5. Rotação em torno do eixo Y.

Projetando os cursores da base móvel sobre a base inercial, temos

$$\begin{aligned} \hat{i}_1 &= \cos(\theta)\hat{i} + 0\hat{j} - \sin(\theta)\hat{k} \\ \hat{j}_1 &= 0\hat{i} + 1\hat{j} + 0\hat{k} \\ \hat{k}_1 &= \sin(\theta)\hat{i} + 0\hat{j} + \cos(\theta)\hat{k} \end{aligned} \quad (16)$$

Colocando o sistema da equação 16 na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} \Rightarrow {}_M\vec{s} = T_\theta {}_I\vec{s} \quad (17)$$

Por último temos uma rotação em torno do eixo X, como apresentado na figura 2.6. Os vetores de Velocidades e aceleração angulares são escritos como,

$${}_I\tilde{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}_I\tilde{\alpha} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

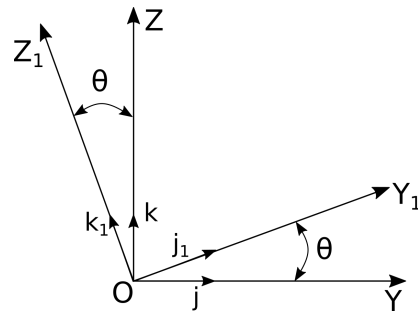


Figura 2.6. Rotação em torno do eixo X.

Projetando os cursores da base móvel sobre a base inercial, temos

$$\begin{aligned}\hat{i}_1 &= 1\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} \\ \hat{j}_1 &= 0\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j} + \sin(\theta)\hat{k} \\ \hat{k}_1 &= 0\hat{i} - \sin(\theta)\hat{j} + \cos(\theta)\hat{k}\end{aligned}\tag{18}$$

Colocando o sistema da equação 18 na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} \Rightarrow {}_M\vec{s} = T_\theta {}_I\vec{s}\tag{19}$$

Percebam que nas três situações, rotação em torno dos eixos Z, Y e X, temos a mesma equação (20a) para transpor o vetor do referencial inercial para o referencial móvel. O que muda é a matriz de transformada de coordenadas T_θ . A situação inversa, transpor um vetor do referencial móvel para o referencial inercial, pode ser realizada multiplicando a equação 20a, à esquerda, pela a inversa da matriz de transformada de coordenadas T_θ^{-1}

$${}_M\vec{s} = T_\theta {}_I\vec{s}\tag{20a}$$

$$T_\theta^{-1} {}_M\vec{s} = T_\theta^{-1} T_\theta {}_I\vec{s} \Rightarrow {}_I\vec{s} = T_\theta^{-1} {}_M\vec{s}\tag{20b}$$

O termo T_θ^{-1} , que representa a inversa da matriz de transformada de coordenadas, possui algumas propriedades interessantes. O seu determinante é invariante e sempre igual a um, e a sua inversa é igual a sua transposta,

$$T_\theta^{-1} = T_\theta^\top$$

Deste modo, a equação 20b pode ser reescrita como,

$${}_I\vec{s} = T_\theta^\top {}_M\vec{s}\tag{21}$$

A seguir vamos obter os vetores de posição, Velocidade e aceleração absoluta de uma partícula, descrevendo uma trajetória no espaço, considerando a existência de um referencial móvel em rotação. É apresentado na figura 2.7 esse sistema. A partícula B descreve a trajetória $traj$, e temos então um vetor posição que sai da origem do nosso referencial móvel em rotação $ponto A$ e vai até a partícula B . Também temos representado um vetor que sai da origem do sistema inercial O

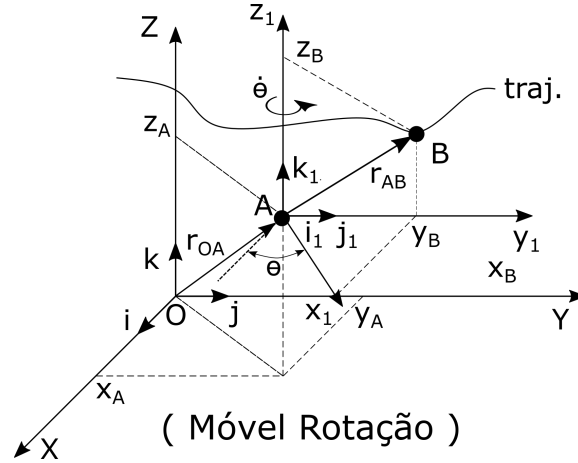


Figura 2.7. Sistema de referência móvel em rotação.

Posição

O vetor de posição é obtido com a equação 22,

$$\begin{aligned} {}_I\vec{r}_{OB} &= {}_I\vec{r}_{OA} + {}_I\vec{r}_{AB} \\ &= {}_I\vec{r}_{OA} + T_\theta^\top \cdot {}_M\vec{r}_{AB} \end{aligned} \quad (22)$$

Velocidade

O vetor Velocidade absoluta é a derivada primeira, em relação ao tempo, do vetor posição:

$$\begin{aligned} {}_I\vec{v}_B &= \frac{d}{dt}({}_I\vec{r}_{OB}) = \frac{d}{dt}({}_I\vec{r}_{OA} + {}_I\vec{r}_{AB}) \\ &= \frac{d}{dt}({}_I\vec{r}_{OA}) + \frac{d}{dt}(T_\theta^\top \cdot {}_M\vec{r}_{AB}) \\ &= \frac{d}{dt}({}_I\vec{r}_{OA}) + \frac{d}{dt}(T_\theta^\top) \cdot {}_M\vec{r}_{AB} + T_\theta^\top \cdot \frac{d}{dt}({}_M\vec{r}_{AB}) \end{aligned} \quad (23)$$

Os termos da equação anterior são melhor apresentados a seguir,

$$\frac{d}{dt}({}_I\vec{r}_{OA}) = {}_I\vec{v}_A \quad (24a)$$

$$\frac{d}{dt}(T_\theta^\top) \cdot {}_M\vec{r}_{AB} = {}_I\vec{\omega} \times (T_\theta^\top \cdot {}_M\vec{r}_{AB}) = {}_I\vec{\omega} \times {}_I\vec{r}_{AB} \quad (24b)$$

$$T_\theta^\top \cdot \frac{d}{dt}({}_M\vec{r}_{AB}) = T_\theta^\top \cdot {}_M\vec{v}_{Rel_{AB}} = {}_I\vec{v}_{Rel_{AB}} \quad (24c)$$

Usando os resultados acima, a Velocidade absoluta da partícula B é dada por,

$${}_I\vec{v}_B = {}_I\vec{v}_A + {}_I\vec{\omega} \times {}_I\vec{r}_{AB} + {}_I\vec{v}_{Rel_{AB}} \quad (25)$$

Chamo a atenção do leitor que na equação 25 os termos estão sendo somados no mesmo referencial, o referencial Inercial.

É comum o discente ter dificuldades de entender o termo \vec{v}_{Rel} . Ele é a taxa de variação do vetor \vec{r}_{AB} , quando este é representado no sistema móvel de referencial. Em termos leigos, é o quanto o vetor \vec{r}_{AB} variou em comprimento para um observador que está sentado no referencial móvel, rotacionando junto a ele com uma Velocidade angular ω .

Aceleração

Para obtermos a aceleração absoluta da partícula B, devemos derivar o vetor Velocidade absoluta em relação ao tempo,

$$\begin{aligned} {}_I\vec{a}_B &= \frac{d}{dt}({}_I\vec{v}_B) = \frac{d}{dt}({}_I\vec{v}_A + {}_I\vec{\omega} \times {}_I\vec{r}_{AB} + {}_I\vec{v}_{Rel_{AB}}) \\ {}_I\vec{a}_B &= \frac{d}{dt} \left[{}_I\vec{v}_A + \left({}_I\vec{\omega} \times T_\theta^\top \cdot {}_M\vec{r}_{AB} \right) + T_\theta^\top \cdot {}_M\vec{v}_{Rel_{AB}} \right] \\ {}_I\vec{a}_B &= \frac{d}{dt}({}_I\vec{v}_A) + \frac{d}{dt}({}_I\vec{\omega}) \times \left(T_\theta^\top \cdot {}_M\vec{r}_{AB} \right) + {}_I\vec{\omega} \times \left[\frac{d}{dt} \left(T_\theta^\top \right) \cdot {}_M\vec{r}_{AB} \right] + {}_I\vec{\omega} \times \left[T_\theta^\top \cdot \frac{d}{dt} \left({}_M\vec{r}_{AB} \right) \right] \\ &\quad + \frac{d}{dt} \left(T_\theta^\top \right) \cdot {}_M\vec{v}_{Rel_{AB}} + T_\theta^\top \cdot \frac{d}{dt} \left({}_M\vec{v}_{Rel_{AB}} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

Cada um dos termos da equação 26 é desenvolvido a seguir:

$$\frac{d}{dt}({}_I\vec{v}_A) = {}_I\vec{a}_A \quad (27a)$$

$$\frac{d}{dt}({}_I\vec{\omega}) \times (T_\theta^\top \cdot_M \vec{r}_{AB}) = {}_I\vec{\alpha} \times {}_I\vec{r}_{AB} \quad (27b)$$

$${}_I\vec{\omega} \times \left[\frac{d}{dt} (T_\theta^\top) \cdot_M \vec{r}_{AB} \right] = {}_I\vec{\omega} \times ({}_I\vec{\omega} \times {}_I\vec{r}_{AB}) \quad (27c)$$

$${}_I\vec{\omega} \times \left[T_\theta^\top \cdot \frac{d}{dt} ({}_M\vec{r}_{AB}) \right] = {}_I\vec{\omega} \times (T_\theta^\top \cdot_M \vec{v}_{Rel_{AB}}) = {}_I\vec{\omega} \times {}_I\vec{v}_{Rel_{AB}} \quad (27d)$$

$$\frac{d}{dt} (T_\theta^\top) \cdot_M \vec{v}_{Rel_{AB}} = {}_I\vec{\omega} \times {}_I\vec{v}_{Rel_{AB}} \quad (27e)$$

$$T_\theta^\top \cdot \frac{d}{dt} ({}_M\vec{v}_{Rel_{AB}}) = T_\theta^\top \cdot_M \vec{a}_{Rel_{AB}} = {}_I\vec{a}_{Rel_{AB}} \quad (27f)$$

Usando os resultados obtidos em 27, temos que a aceleração da partícula B é dada por:

$${}_I\vec{a}_B = {}_I\vec{a}_A + {}_I\vec{\alpha} \times {}_I\vec{r}_{AB} + {}_I\vec{\omega} \times ({}_I\vec{\omega} \times {}_I\vec{r}_{AB}) + 2 {}_I\vec{\omega} \times {}_I\vec{v}_{Rel_{AB}} + {}_I\vec{a}_{Rel_{AB}} \quad (28)$$

Assim como na posição e na Velocidade, todos os termos devem estar na mesma base de referencial, a base Inercial.

É importante ressaltar o que cada termo da equação 28 significa,

- ${}_I\vec{a}_A$ é a aceleração absoluta do ponto A, representada no sistema inercial.
- ${}_I\vec{\alpha} \times {}_I\vec{r}_{AB}$ representa a aceleração tangencial, e é o produto vetorial da aceleração angular ${}_I\vec{\alpha}$ pelo vetor posição ${}_I\vec{r}_{AB}$.
- ${}_I\vec{\omega} \times ({}_I\vec{\omega} \times {}_I\vec{r}_{AB})$ representa a aceleração normal do sistema. Este termo está relacionado à variação do vetor de Velocidade (${}_I\vec{\omega} \times {}_I\vec{r}_{AB}$) em termos de direção.
- $2 {}_I\vec{\omega} \times {}_I\vec{v}_{Rel_{AB}}$ é a chamada aceleração de Coriolis. Este termo está relacionado à variação do vetor de Velocidade relativa ${}_I\vec{v}_{Rel_{AB}}$ em termos de direção.

- ${}_I\vec{a}_{Rel_{AB}}$ representa a aceleração relativa entre os pontos A e B. É a taxa de variação do vetor ${}_M\vec{v}_{Rel_{AB}}$, obtida na base móvel e representada no referencial inercial.

2.2.3 Rotações no plano e no espaço

Nesta seção é abordado como resolver problemas de sistemas articulados com sucessivas rotações. Sejam elas no plano ou no espaço.

No Plano

Vamos assumir que temos duas rotações consecutivas em torno de eixos paralelos entre si, eixos Z_1 e Z_2 , ou seja, o movimento ocorre no plano. As Velocidades angulares são,

$${}_I\dot{\theta}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}; \quad {}_{M_1}\dot{\theta}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

As matrizes de transformada de coordenadas são,

$$T_{\theta_1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & 0 \\ -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad T_{\theta_2} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) & 0 \\ -\sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E suas transpostas,

$$T_{\theta_1}^\top = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad T_{\theta_2}^\top = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para transpor um vetor da base móvel M_2 para a base inercial I , devemos multiplicar por $T_{\theta_1}^\top T_{\theta_2}^\top$,

$$T_{\theta_1}^\top T_{\theta_2}^\top = \begin{bmatrix} C(\theta_1) & -S(\theta_1) & 0 \\ S(\theta_1) & C(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C(\theta_2) & -S(\theta_2) & 0 \\ S(\theta_2) & C(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(\theta_1 + \theta_2) & -S(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ S(\theta_1 + \theta_2) & C(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Generalizando para n rotações temos,

$$T = \begin{bmatrix} \cos\left(\sum_{i=1}^n \theta_i\right) & -\text{sen}\left(\sum_{i=1}^n \theta_i\right) & 0 \\ \text{sen}\left(\sum_{i=1}^n \theta_i\right) & \cos\left(\sum_{i=1}^n \theta_i\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

As Velocidades angulares absolutas representadas no sistema inercial são,

$$\begin{aligned} {}_I\vec{\omega}_1 = {}_I\dot{\theta}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \\ {}_I\vec{\omega}_2 = {}_I\vec{\omega}_1 + T_{\theta_1}^\top \cdot {}_{M_1}\dot{\theta}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\text{sen}(\theta_1) & 0 \\ \text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Generalizando,

$${}_I\vec{\omega}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i \end{bmatrix} \quad (31)$$

No Espaço

O movimento no espaço ocorre com rotações em eixos diferentes e com isso a matriz de transformada de coordenadas torna-se diferente do que ocorre com o movimento no plano. Por exemplo, suponha rotações sucessivas em torno dos eixos Z, X_1 e Y_2 ,

$${}_I\dot{\theta}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}; \quad {}_{M_1}\dot{\theta}_2 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}_{M_2}\dot{\theta}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As Velocidades angulares absolutas das bases, representadas no sistema inercial são,

$${}_I\vec{\omega}_1 = {}_I\dot{\theta}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (32a)$$

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{\omega}_2 &= {}_I\dot{\theta}_1 + T_{\theta_1}^\top M_1 \dot{\theta}_1 \\
 {}_I\vec{\omega}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\text{sen}(\theta_1) & 0 \\ \text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1) \\ \dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_1) \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (32b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{\omega}_3 &= {}_I\dot{\theta}_1 + T_{\theta_1}^\top M_1 \dot{\theta}_2 + T_{\theta_1}^\top T_{\theta_2}^\top M_2 \dot{\theta}_3 \\
 {}_I\vec{\omega}_3 &= \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1) \\ \dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_1) \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C(\theta_1) & -S(\theta_1) & 0 \\ S(\theta_1) & C(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C(\theta_2) & -S(\theta_2) \\ 0 & S(\theta_2) & C(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 {}_I\vec{\omega}_3 &= \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1) - \dot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ \dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_1) + \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (32c)
 \end{aligned}$$

Como verificado pelas equações anteriores, o leitor deve fazer todas as multiplicações para obter as Velocidades angulares absolutas. E o mesmo deve ser feito para as acelerações angulares.

Algo que deve ser chamado a atenção é que, mesmo quando temos as Velocidades angulares $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ e $\dot{\theta}_3$ constantes, as acelerações angulares absolutas não são nulas. Isso ocorre devido ainda existir variação na direção dos vetores de Velocidade angular. As acelerações em 33 são obtidas ao derivar as equações 32 considerando essa situação.

$${}_I\vec{\alpha}_1 = \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33a)$$

$${}_I\vec{\alpha}_2 = \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_1) \\ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33b)$$

$${}_I\vec{\alpha}_3 = \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_1) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \text{cos}(\theta_1)\text{cos}(\theta_2) + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_2) \\ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{cos}(\theta_1) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_1)\text{cos}(\theta_2) - \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \text{cos}(\theta_1)\text{sen}(\theta_2) \\ \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \text{cos}(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (33c)$$

2.3 Exemplos Aplicados

Nesta seção, são aplicados os conhecimentos adquiridos até o momento em alguns mecanismos articulados bastante comuns na engenharia. De início vamos resolver quatro mecanismos de cadeia fechada no plano, são eles o Biela Manivela, o Garfo Escocês, o Retorno Rápido e o Quatro Barras. Em seguida são resolvidos mecanismos de cadeia aberta no plano: manipuladores robóticos RP e RRR. Por último, um mecanismo de cadeia aberta no espaço: um guindaste. No final da seção são propostos outros mecanismos para o leitor exercitar seus conhecimentos.

2.3.1 Biela-manivela

O mecanismo Biela Manivela é talvez o exemplos mais clássico de mecanismo na engenharia e foi abordado no capítulo de Introdução do livro. Abaixo é apresentada a configuração do mecanismo e o posicionamento dos referenciais Inercial e móveis. Via de regra, sempre que temos uma articulação de rotação devemos colocar um referencial móvel de rotação nela. Deste modo, no nosso mecanismo temos um referencial Inercial e dois referenciais móveis.

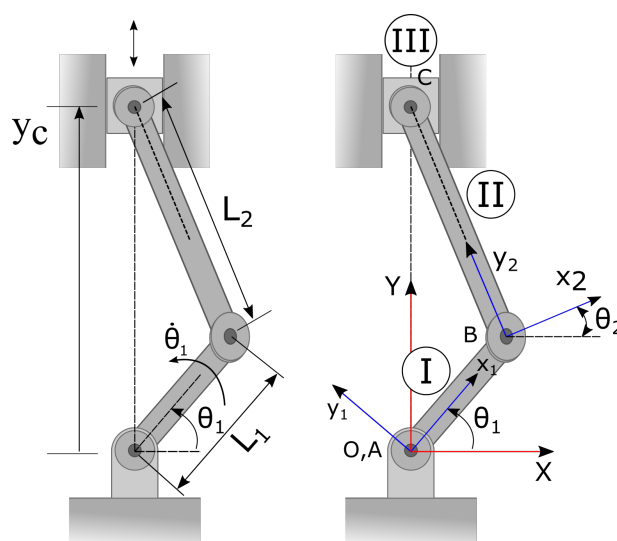


Figura 2.8. Biela-Manivela. Fonte: Autor.

Neste mecanismo os comprimentos da manivela (L_1) e da biela (L_2) são conhecidos. Tam-

b em são conhecidos o ângulo de entrada na manivela (θ_1) e a velocidade angular ($\dot{\theta}_1$), que é considerada constante e assumida ser fornecida por uma motor posicionado em O . Na tabela 2.1 são apresentados os parâmetros conhecidos e desconhecidos do mecanismo Biela Manivela.

Tabela 2.1. Parâmetros do mecanismo Biela Manivela

Conhecidos	Desconhecidos
$\theta_1, \omega_1, \alpha_1$	$\theta_2, \omega_2, \alpha_2$
L_1, L_2, x_C	y_C, v_{yC}, a_{yC}

Depois de definidos os referenciais, como apresentado na figura 2.8, definimos as matrizes de transformadas de coordenadas com relação aos ângulos dos elementos do mecanismos (Eq. 34) e os vetores de velocidade e aceleração angulares (Eq. 35). Os vetores de posição (Eq. 36), são descritos nos referenciais cuja representação seja a mais direta possível, ou seja, nos referenciais móveis.

$$T_{\theta_1}^\top = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\text{sen}(\theta_1) & 0 \\ \text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad T_{\theta_2}^\top = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\text{sen}(\theta_2) & 0 \\ \text{sen}(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$${}_I\vec{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}; \quad {}_I\vec{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}; \quad {}_I\vec{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}; \quad {}_I\vec{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$${}_{M1}\vec{r}_{AB} = \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}_{M2}\vec{r}_{BC} = \begin{bmatrix} 0 \\ L_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

A seguir são calculadas a posição, a velocidade e a aceleração do ponto de interesse C .

Posição

O vetor posição ${}_I\vec{r}_{OC}$ pode ser definido percorrendo o caminhos $O-A-B-C$ na figura 2.8.

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{r}_{OC} &= \overset{0}{\cancel{{}_I\vec{r}_{OA}}} + {}_I\vec{r}_{AB} + {}_I\vec{r}_{BC} \\
 {}_I\vec{r}_{OC} &= T_{\theta_1}^\top \cdot M1 \vec{r}_{AB} + T_{\theta_2}^\top \cdot M2 \vec{r}_{BC}
 \end{aligned} \tag{37}$$

A equação acima deve ser igualada a restrição cinemática do mecanismo para a posição,

$${}_I\vec{r}_{OC} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_C \\ 0 \end{bmatrix} \tag{38}$$

Resolvendo os produtos,

$$T_{\theta_1}^\top \cdot M1 \vec{r}_{AB} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\text{sen}(\theta_1) & 0 \\ \text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cdot \cos(\theta_1) \\ L_1 \cdot \text{sen}(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{39}$$

$$T_{\theta_2}^\top \cdot M2 \vec{r}_{BC} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\text{sen}(\theta_2) & 0 \\ \text{sen}(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ L_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2) \\ L_2 \cdot \cos(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{40}$$

E substituindo as equações 38, 39 e 40 na equação 37, temos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y_C \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cdot \cos(\theta_1) \\ L_1 \cdot \text{sen}(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2) \\ L_2 \cdot \cos(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{41}$$

O que resulta no sistema de equações a seguir,

$$\begin{cases} 0 = L_1 \cdot \cos(\theta_1) - L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2) \\ y_C = L_1 \cdot \text{sen}(\theta_1) + L_2 \cdot \cos(\theta_2) \end{cases} \tag{42}$$

A resolução do sistema acima fornece equações para calcularmos θ_2 e y_C .

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \text{sen}^{-1}\left(\frac{L_1}{L_2} \cdot \cos(\theta_1)\right) \\ y &= L_1 \cdot \text{sen}(\theta_1) + L_2 \cdot \cos(\theta_2)\end{aligned}\quad (43)$$

Exemplo

Considere os seguintes valores para os parâmetros de posição: $L_1 = 0.1$ [m], $L_2 = 0.4$ [m] e $0 \leq \theta_1 \leq 4\pi$. A seguir são plotados alguns gráficos de posição do mecanismo.

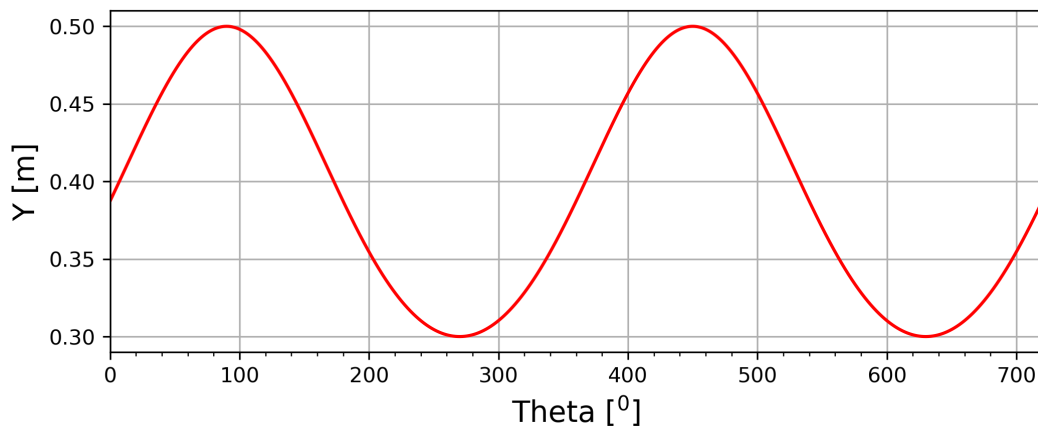


Figura 2.9. Posição do ponto C em função do θ .

Velocidade

Assim como o vetor posição ${}^I\vec{r}_{OC}$, o vetor velocidade ${}^I\vec{v}_C$ pode ser definido percorrendo o caminhos $O-A-B-C$ na figura 2.8.

$$\begin{aligned}{}^I\vec{v}_C &= {}^I\vec{v}_B + {}^I\vec{\omega}_2 \times {}^I\vec{r}_{BC} + \overset{0}{\cancel{{}^I\vec{v}_{relBC}}} \\ {}^I\vec{v}_B &= \overset{0}{\cancel{{}^I\vec{v}_A}} + {}^I\vec{\omega}_1 \times {}^I\vec{r}_{AB} + \overset{0}{\cancel{{}^I\vec{v}_{relAB}}}\end{aligned}\quad (44)$$

Os vetores ${}^I\vec{v}_{relAB}$ e ${}^I\vec{v}_{relBC}$ são nulos pois não há variação da magnitude dos vetores ${}^{M1}\vec{r}_{AB}$ e ${}^{M2}\vec{r}_{BC}$. Desse modo temos,

$${}^I\vec{v}_C = {}^I\vec{\omega}_1 \times {}^I\vec{r}_{AB} + {}^I\vec{\omega}_2 \times {}^I\vec{r}_{BC}\quad (45)$$

onde ${}^I\vec{\omega}_1 = [0 \ 0 \ \dot{\theta}_1]^\top$ e ${}^I\vec{\omega}_2 = [0 \ 0 \ \dot{\theta}_2]^\top$ representam os vetores velocidades angulares da manivela e da biela, respectivamente.

A equação 45 deve ser igualada a restrição cinemática do mecanismos para a velocidade, ${}^I\vec{v}_C = [0 \ v_{yC} \ 0]^\top$.

Resolvendo os produtos vetoriais,

$${}^I\vec{\omega}_1 \times {}^I\vec{r}_{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \\ L_1 \cos(\theta_1) & L_1 \sin(\theta_1) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 L_1 \sin(\theta_1) \\ \dot{\theta}_1 L_1 \cos(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$${}^I\vec{\omega}_2 \times {}^I\vec{r}_{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \\ -L_2 \sin(\theta_2) & L_2 \cos(\theta_2) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 L_2 \cos(\theta_2) \\ -\dot{\theta}_2 L_2 \sin(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Substituindo as equações 46 e 47 na equação 45,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v_{yC} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 L_1 \sin(\theta_1) \\ \dot{\theta}_1 L_1 \cos(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 L_2 \cos(\theta_2) \\ -\dot{\theta}_2 L_2 \sin(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

O que resulta no sistema de equações lineares da Equação 49, com duas equações e duas incógnitas.

$$\begin{aligned} 0 &= -\dot{\theta}_1 L_1 \sin(\theta_1) - \dot{\theta}_2 L_2 \cos(\theta_2) \\ v_{yC} &= \dot{\theta}_1 L_1 \cos(\theta_1) - \dot{\theta}_2 L_2 \sin(\theta_2) \end{aligned} \quad (49)$$

Resolvendo a equação 49 para $\dot{\theta}_2$ e v_{yC} ,

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_2 &= -\dot{\theta}_1 \frac{L_1 \sin(\theta_1)}{L_2 \cos(\theta_2)} \\ v_{yC} &= \dot{\theta}_1 L_1 \cos(\theta_1) - \dot{\theta}_2 L_2 \sin(\theta_2) \end{aligned} \quad (50)$$

Exemplo

A seguir é plotado o gráfico da velocidade do pistão em função do ângulo de entrada da manivela. Considere os seguintes valores para os parâmetros de posição: $L_1 = 0.1$ [m], $L_2 = 0.4$ [m] e $0 \leq \theta_1 \leq 4\pi$. A velocidade angular de entrada da manivela é constante e igual a 1200 [rpm].

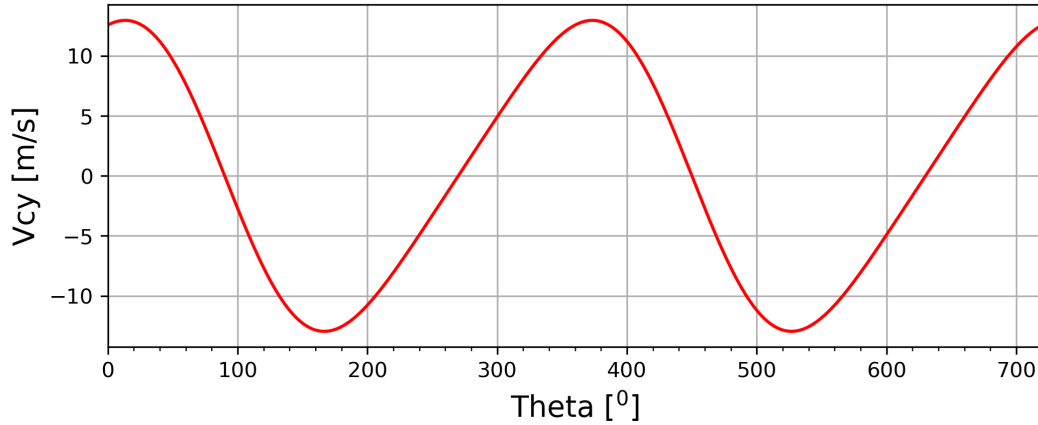


Figura 2.10. Velocidade do ponto C.

Aceleração

O vetor aceleração ${}^I\vec{a}_C$ é definido nas equações a seguir,

$$\begin{aligned} {}^I\vec{a}_C &= {}^I\vec{a}_B + {}^I\vec{\alpha}_2 \times {}^I\vec{r}_{BC} + {}^I\vec{\omega}_2 \times ({}^I\vec{\omega}_2 \times {}^I\vec{r}_{BC}) + 2 \cdot {}^I\vec{\omega}_2 \times {}^I\vec{v}_{relBC} + {}^I\vec{a}_{relBC} \\ {}^I\vec{a}_B &= {}^I\vec{a}_A + {}^I\vec{\alpha}_1 \times {}^I\vec{r}_{AB} + {}^I\vec{\omega}_1 \times ({}^I\vec{\omega}_1 \times {}^I\vec{r}_{AB}) + 2 \cdot {}^I\vec{\omega}_1 \times {}^I\vec{v}_{relAB} + {}^I\vec{a}_{relAB} \end{aligned} \quad (51)$$

Devido os vetores ${}^I\vec{v}_{relAB}$ e ${}^I\vec{v}_{relBC}$ serem nulos, neste mecanismo não há aceleração de Coriolis e nem a aceleração relativa. Logo,

$${}^I\vec{a}_C = {}^I\vec{\alpha}_1 \times {}^I\vec{r}_{AB} + {}^I\vec{\omega}_1 \times ({}^I\vec{\omega}_1 \times {}^I\vec{r}_{AB}) + {}^I\vec{\alpha}_2 \times {}^I\vec{r}_{BC} + {}^I\vec{\omega}_2 \times ({}^I\vec{\omega}_2 \times {}^I\vec{r}_{BC}) \quad (52)$$

A equação 52 deve ser igualada a restrição cinemática do mecanismos para a aceleração, ${}^I\vec{a}_C = [0 \quad a_{yC} \quad 0]^T$.

Resolvendo os produtos da equação 52,

$${}_I\vec{\alpha}_1 \times {}_I\vec{r}_{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 \\ L_1 \cos(\theta_1) & L_1 \sin(\theta_1) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 L_1 \sin(\theta_1) \\ \ddot{\theta}_1 L_1 \cos(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$${}_I\vec{\alpha}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \ddot{\theta}_2 \\ -L_2 \sin(\theta_2) & L_2 \cos(\theta_2) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_2 L_2 \cos(\theta_2) \\ -\ddot{\theta}_2 L_2 \sin(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

$${}_I\vec{\omega}_1 \times ({}_I\vec{\omega}_1 \times {}_I\vec{r}_{AB}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \\ -\dot{\theta}_1 L_1 \sin(\theta_1) & \dot{\theta}_1 L_1 \cos(\theta_1) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1^2 L_1 \cos(\theta_1) \\ -\dot{\theta}_1^2 L_1 \sin(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$${}_I\vec{\omega}_2 \times ({}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \\ -\dot{\theta}_2 L_2 \cos(\theta_2) & -\dot{\theta}_2 L_2 \sin(\theta_2) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2^2 L_2 \sin(\theta_2) \\ -\dot{\theta}_2^2 L_2 \cos(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Substituindo as equações 53, 54, 55 e 56 na equação 52, e considerando a restrição cinemática da aceleração, temos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ a_{yC} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 L_1 \sin(\theta_1) - \dot{\theta}_1^2 L_1 \cos(\theta_1) + \dot{\theta}_2^2 L_2 \sin(\theta_2) - \ddot{\theta}_2 L_2 \cos(\theta_2) \\ \ddot{\theta}_1 L_1 \cos(\theta_1) - \dot{\theta}_1^2 L_1 \sin(\theta_1) - \dot{\theta}_2^2 L_2 \cos(\theta_2) - \ddot{\theta}_2 L_2 \sin(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

Devemos resolver o sistema de equações 58 para as incógnitas $\ddot{\theta}_2$ e a_{yC} ,

$$\begin{cases} 0 = -\ddot{\theta}_1 L_1 \sin(\theta_1) - \dot{\theta}_1^2 L_1 \cos(\theta_1) + \dot{\theta}_2^2 L_2 \sin(\theta_2) - \ddot{\theta}_2 L_2 \cos(\theta_2) \\ a_{yC} = \ddot{\theta}_1 L_1 \cos(\theta_1) - \dot{\theta}_1^2 L_1 \sin(\theta_1) - \dot{\theta}_2^2 L_2 \cos(\theta_2) - \ddot{\theta}_2 L_2 \sin(\theta_2) \end{cases} \quad (58)$$

Logo,

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-\ddot{\theta}_1 L_1 \sin(\theta_1) - \dot{\theta}_1^2 L_1 \cos(\theta_1) + \dot{\theta}_2^2 L_2 \sin(\theta_2)}{L_2 \cdot \cos(\theta_2)}$$
$$a_{yC} = \ddot{\theta}_1 L_1 \cos(\theta_1) - \dot{\theta}_1^2 L_1 \sin(\theta_1) - \dot{\theta}_2^2 L_2 \cos(\theta_2) - \ddot{\theta}_2 L_2 \sin(\theta_2) \quad (59)$$

Exemplo

A aceleração do pistão (*ponto C*) em função do ângulo de entrada da manivela é plotada no gráfico abaixo. Os parâmetros de entrada são: $L_1 = 0.1$ [m], $L_2 = 0.4$ [m] e $0 \leq \theta_1 \leq 4\pi$. A velocidade de entrada da manivela é constante e igual a 1200 [rpm], logo $\ddot{\theta}_1 = 0$.

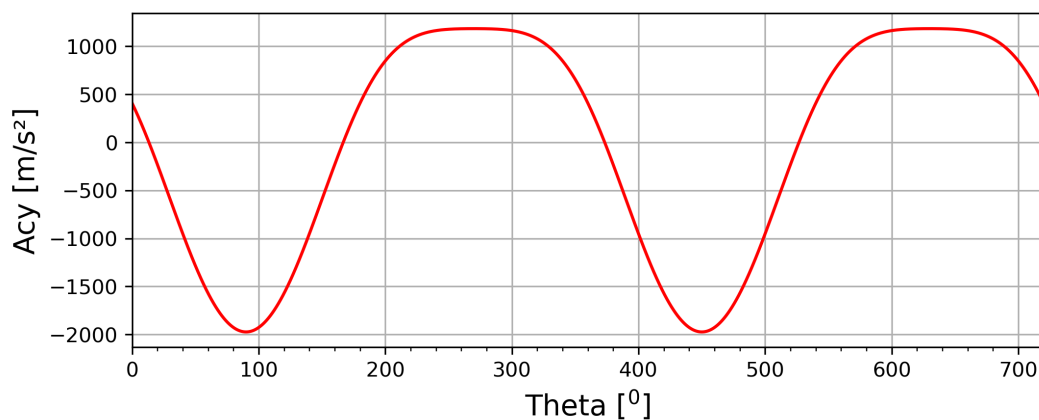


Figura 2.11. Aceleração do ponto *C*.

Python

Abaixo é apresentado um código em Python utilizado para gerar os gráficos da posição, velocidade e aceleração do mecanismo Biela-Manivela, mostrados nas subseções anteriores.

```
1  """
2  Instituto Federal do Rio Grande do Sul
3  Programa: Cinemática do Mecanismo Biela Manivela
4  Author: Prof. Dr. Felipe Rodrigues de Freitas Neto
5  Data: 09/09/2023
6  """
7  import numpy as np
8  from numpy import sin, pi, cos
9  import matplotlib.pyplot as plt
10
11 #Parametros
12 L1, L2 = 0.1, 0.4 #[m] ;
```

```
13 theta1=0.0 ;dtheta1=0.1*pi/180
14 n=1200 #rpm ; omega1= n*2*pi/60 #rad/s
15 alpha1=0.0 # rad/s^2
16 Theta1=np.arange(theta1,4*pi,dtheta1)
17 Y=[]; Vcy=[] ; Acy=[] ;Theta1_grad=[]
18
19 for theta1 in Theta1:
20     #Posiçaõ
21     theta2 = np.arcsin(L1*cos(theta1)/L2)
22     y=L1*sin(theta1)+L2*cos(theta2)
23     Y.append(y)
24     theta1_grad=theta1*180/pi
25     Theta1_grad.append(theta1_grad)
26     #Velocidade
27     omega2=-omega1*L1*sin(theta1)/(L2*cos(theta2))
28     vcy=omega1*L1*cos(theta1) - omega2*L2*sin(theta2)
29     Vcy.append(vcy)
30     #Aceleraçaõ
31     alpha2=(-alpha1*L1*sin(theta1) - omega1**2*L1*cos(theta1) + omega2**2*L2
32             *sin(theta2)) / (L2*cos(theta2))
33     acy= alpha1*L1*cos(theta1)-omega1**2*L1*sin(theta1)-omega2**2*L2*cos(
34             theta2)-alpha2*L2*sin(theta2)
35     Acy.append(acy)
36
37 #####Graficos#####
38 #Posiçaõ
39 plt.figure(figsize=(8,3),dpi=300)
40 plt.plot(Theta1_grad,Y, color='red',linewidth=1.5)
41 plt.ylabel('Y [m]', fontsize=14) ; plt.xlabel('Theta [°]', fontsize=14)
42 plt.xticks(np.arange(0,720,step=20),minor=True) ;plt.xlim(0,720) ;plt.grid(
43     True)
44 #Velocidade
45 plt.figure(figsize=(8,3),dpi=300)
46 plt.plot(Theta1_grad,Vcy, color='red',linewidth=1.5)
47 plt.ylabel('Vcy [m/s]', fontsize=14) ;plt.xlabel('Theta [°]', fontsize
48     =14)
49 plt.xticks(np.arange(0,720,step=20),minor=True) ; plt.xlim(0,720) ; plt.grid
50     (True)
51 #Aceleraçaõ
52 plt.figure(figsize=(8,3),dpi=300)
```

```

48 plt.plot(Theta1_grad,Acy, color='red',linewidth=1.5)
49 plt.ylabel('Acy [m/s^2]', fontsize=14) ; plt.xlabel('Theta [^\theta]', fontsize
    =14)
50 plt.xticks(np.arange(0,720,step=20),minor=True);plt.xlim(0,720) ; plt.grid(
    True)
51 plt.show()
    
```

O código também encontra-se disponível no Github.

<https://raw.githubusercontent.com/BielaManivela.py>

2.3.2 Garfo escocês

O mecanismo conhecido como garfo escocês é apresentado na figura 2.12. Neste mecanismo, a manivela (elemento 1) rotaciona em torno do ponto O, escolhido para ser a origem do referencial Inercial e a articulação em B translada dentro do rasgo do elemento 2. Desse modo, o movimento rotativo do elo 1 é convertido em um movimento oscilatório no elo 2. Além do referencial Inercial, posicionado no ponto O, foram colocados um referencial móvel 1, localizado no ponto A e solidário ao elemento 1, e um outro referencial móvel em translação com origem no ponto B.

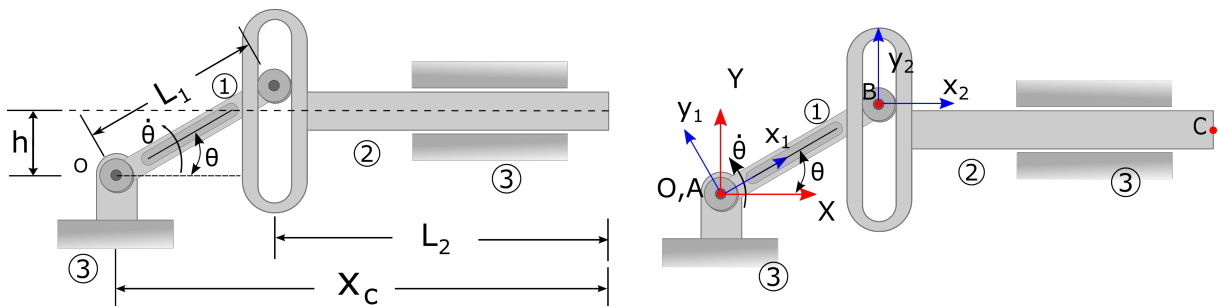


Figura 2.12. Garfo Escocês. Fonte: Autor.

Na equação 60 são apresentadas as transpostas das matrizes de transformada de coordenadas para os referenciais móveis 1 e 2. E na equação 61 são representados os vetores de velocidade e aceleração angulares descritos no referencial Inercial, e os vetores de posição descritos nos referenciais móveis. É importante destacar que o parâmetro y_B na equação 61 é variável e desconhecido, diferentes dos comprimentos L_1 e L_2 , que são ambos constantes e conhecidos.

$$T_{\theta_1}^T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\text{sen}(\theta_1) & 0 \\ \text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad I^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$${}_I\vec{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}; \quad {}_I\vec{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}; \quad {}_{M1}\vec{r}_{AB} = \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}_{M2}\vec{r}_{BC} = \begin{bmatrix} L_2 \\ y_B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

A seguir são calculadas a posição, a velocidade e a aceleração do ponto de interesse C .

Posição

O vetor posição ${}_I\vec{r}_{OC}$ pode ser definido percorrendo o caminhos $O-A-B-C$ na figura 2.12.

$$\begin{aligned} {}_I\vec{r}_{OC} &= {}_I\vec{r}_{OA} + {}_I\vec{r}_{AB} + {}_I\vec{r}_{BC} \\ {}_I\vec{r}_{OC} &= T_\theta^\top {}_{M1}\vec{r}_{AB} + I_{M2}^\top \vec{r}_{BC} \end{aligned} \quad (62)$$

A equação anterior deve ser igualada a restrição cinemática do mecanismo ${}_I\vec{r}_{OC} = [x_C; h; 0]^\top$.

Resolvendo os produtos,

$$\begin{aligned} {}_I\vec{r}_{AB} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cos(\theta) \\ L_1 \sen(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \\ {}_I\vec{r}_{BC} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_2 \\ y_{BC} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2 \\ y_{BC} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (63)$$

Substituindo a equação 63 na equação 62,

$$\begin{bmatrix} x_C \\ h \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cos(\theta) \\ L_1 \sen(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_2 \\ y_{AB} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (64)$$

A equação acima é um sistema de duas equações e duas incógnitas,

$$\begin{cases} x_c = L_1 \cos(\theta) + L_2 \\ h = L_1 \sen(\theta) + y_{AB} \end{cases} \quad (65)$$

Resolvendo para x_C e y_{AB} temos,

$$\begin{aligned} x_C &= L_1 \cos(\theta) + L_2 \\ y_{AB} &= h - L_1 \sin(\theta) \end{aligned} \quad (66)$$

Exemplo

Considere um mecanismo de Garfo Escocês com $L_1 = 0.1[\text{m}]$, $L_2 = 0.4[\text{m}]$ e $h = 0.04[\text{m}]$. A posição da ponta do mecanismo (ponto C) em função do ângulo de entrada (θ) da manivela é apresentada na figura 2.13.

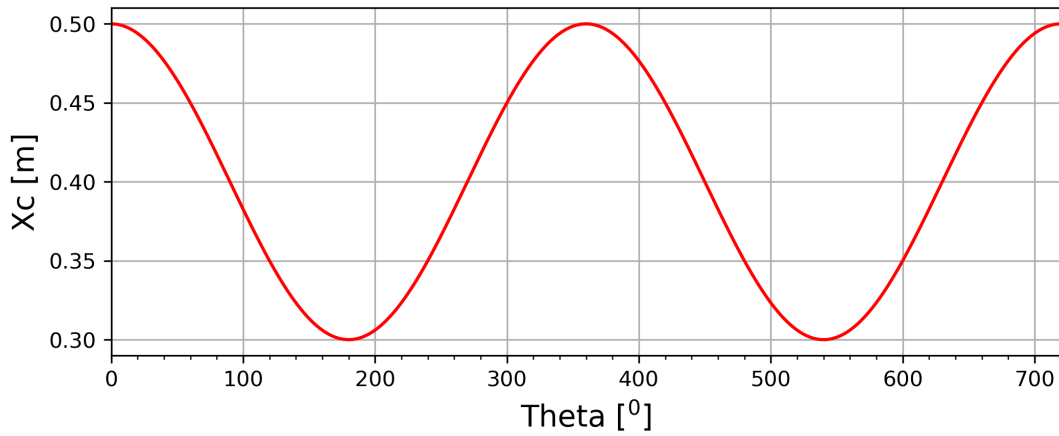


Figura 2.13. Posição X_c em função do ângulo θ .

Velocidade

O vetor velocidade ${}^I\vec{v}_C$ é definido na equação 67,

$$\begin{aligned} {}^I\vec{v}_C &= {}^I\vec{v}_B + {}^I\vec{\omega}_2 \times {}^I\vec{r}_{BC} + {}^I\vec{v}_{RelBC} \\ {}^I\vec{v}_B &= {}^I\vec{v}_A + {}^I\vec{\omega}_1 \times {}^I\vec{r}_{AB} + {}^I\vec{v}_{RelAB} \\ {}^I\vec{v}_C &= {}^I\vec{\omega}_1 \times {}^I\vec{r}_{AB} + {}^I\vec{v}_{RelBC} \end{aligned} \quad (67)$$

A equação 67 deve ser igualada a restrição cinemática ${}^I\vec{v}_C = [v_{Cx}; 0; 0]^T$.

Resolvendo os termos da equação 67,

$${}_I\vec{\omega}_1 \times_I \vec{r}_{OA} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ L_1 \cos(\theta) & L_1 \sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} L_1 \sin(\theta) \\ \dot{\theta} L_1 \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (68)$$

$${}_I\vec{v}_{RelBC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{y}_{BC} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{y}_{BC} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (69)$$

Substituindo as equações 68 e 69 na equação 67 temos,

$$\begin{bmatrix} v_{Cx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} L_1 \sin(\theta) \\ \dot{\theta} L_1 \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{y}_{BC} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (70)$$

Resolvendo para as incógnitas v_{Cx} e \dot{y}_{BC} ,

$$\begin{cases} v_{Cx} = -\dot{\theta} L_1 \sin(\theta) \\ 0 = \dot{\theta} L_1 \cos(\theta) + \dot{y}_{BC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{Cx} = -\dot{\theta} L_1 \sin(\theta) \\ \dot{y}_{BC} = -\dot{\theta} L_1 \cos(\theta) \end{cases} \quad (71)$$

Exemplo

Continuado o exemplo utilizado na posição, vamos supor que a manivela rotaciona a uma velocidade constante $n = 1200$ [rpm]. A velocidade do ponto C em função do ângulo θ da manivela é apresentada na figura 2.14.

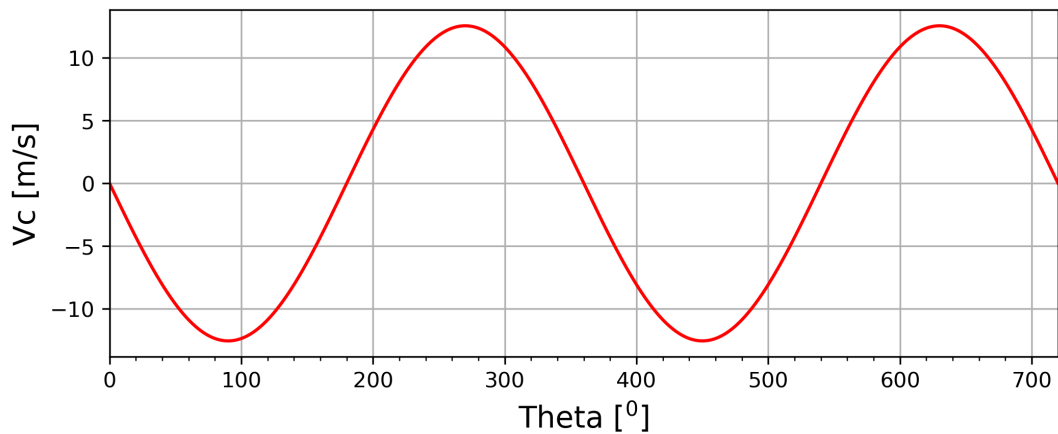


Figura 2.14. Velocidade v_{Cx} em função do ângulo θ .

Aceleração

Por ultimo, vamos desenvolver equações que nos permitam calcular a aceleração do ponto C para qualquer ângulo de entrada da manivela.

O vetor aceleração ${}_I\vec{a}_C$ é definido nas equações a seguir,

$$\begin{aligned} {}_I\vec{a}_C &= {}_I\vec{a}_B + {}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC} + {}_I\dot{\vec{\omega}}_2 \times ({}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC}) + 2{}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{v}_{RelBC} + {}_I\vec{a}_{RelBC} \\ {}_I\vec{a}_C &= {}_I\vec{a}_B + {}_I\vec{a}_{RelBC} \end{aligned} \quad (72)$$

O vetor aceleração ${}_I\vec{a}_B$ é dado por,

$$\begin{aligned} {}_I\vec{a}_B &= {}_I\vec{\alpha}_1 \times {}_I\vec{r}_{AB} + {}_I\vec{\omega}_1 \times ({}_I\vec{\omega}_1 \times {}_I\vec{r}_{AB}) + 2{}_I\vec{\omega}_1 \times {}_I\vec{v}_{RelAB} + {}_I\vec{a}_{RelAB} \\ {}_I\vec{a}_B &= \vec{\alpha}_1 \times {}_I\vec{r}_{AB} + {}_I\vec{\omega}_1 \times ({}_I\vec{\omega}_1 \times {}_I\vec{r}_{AB}) \\ {}_I\vec{a}_B &= \vec{\alpha}_1 \times {}_I\vec{r}_{AB} - \dot{\theta}^2 \cdot \vec{r}_{AB} \end{aligned} \quad (73)$$

Logo, com as equações 72 e 73 temos,

$$\vec{a}_C = \vec{\alpha}_1 \times {}_I\vec{r}_{AB} - \dot{\theta}^2 \cdot \vec{r}_{AB} + {}_I\vec{a}_{RelBC} \quad (74)$$

Resolvendo cada termo da equação 74,

$${}_I\vec{\alpha}_1 \times {}_I\vec{r}_{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \ddot{\theta} \\ L_1 \cos(\theta) & L_1 \sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta} L_1 \sin(\theta) \\ \ddot{\theta} L_1 \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (75)$$

$$-\dot{\theta}^2 \cdot \vec{r}_{AB} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}^2 L_1 \cos(\theta) \\ -\dot{\theta}_1^2 L_1 \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$${}_I\vec{a}_{RelBC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{y}_{BC} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{y}_{BC} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (77)$$

Substituindo as equações 75, 76 e 77 na equação 74 temos,

$$\begin{bmatrix} a_{Cx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta} L_1 \text{sen}(\theta) \\ \ddot{\theta} L_1 \text{cos}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{\theta}^2 L_1 \text{cos}(\theta) \\ -\dot{\theta}_1^2 L_1 \text{sen}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{y}_{BC} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (78)$$

Resolvendo o sistema da equação 78 para as incógnitas a_{Cx} e \ddot{y}_{BC} ,

$$\begin{cases} a_{Cx} = -\ddot{\theta} L_1 \text{sen}(\theta) - \dot{\theta}^2 L_1 \text{cos}(\theta) \\ \ddot{y}_{BC} = -\ddot{\theta} L_1 \text{cos}(\theta) + \dot{\theta}^2 L_1 \text{sen}(\theta) \end{cases} \quad (79)$$

Exemplo

Considere um mecanismo de Garfo Escocês (Figura 2.12) com $L_1 = 0.1[\text{m}]$, $L_2 = 0.4[\text{m}]$ e $h = 0.04[\text{m}]$. A velocidade angular da manivela é constante e possui o valor de $n = 1200 [\text{rpm}]$. A aceleração angular da manivela é $\alpha = 0 [\text{rad}/\text{s}^2]$. A aceleração linear da ponta do mecanismo (ponto C), em função do ângulo de entrada (θ) da manivela, é apresentada na figura 2.15.

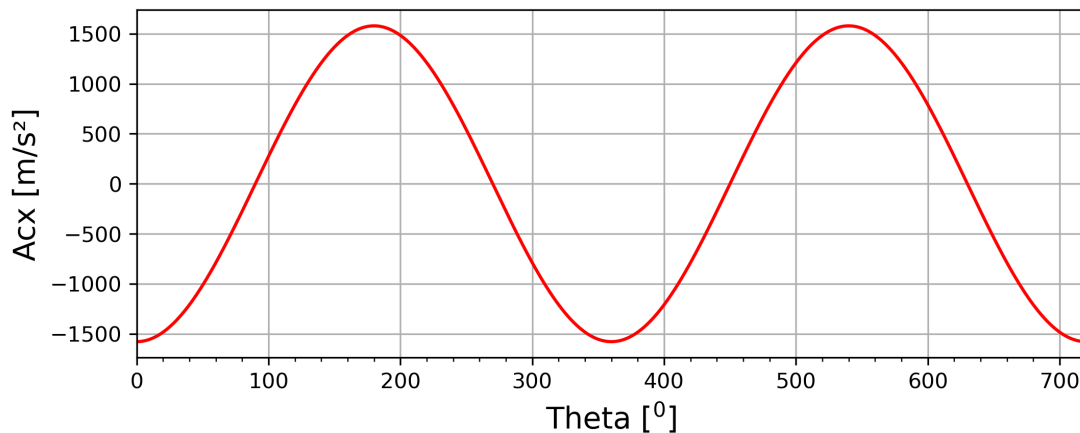


Figura 2.15. Aceleração A_c em função do ângulo θ .

Python

Abaixo é apresentado um código em Python utilizado para gerar os gráficos da posição, velocidade e aceleração do mecanismo Garfo Escocês, mostrados nas subseções anteriores.

```

1  """
2  Instituto Federal do Rio Grande do Sul
3  Programa: Cinemática do Mecanismo Garfo Escocês
4  Author: Prof. Dr. Felipe Rodrigues de Freitas Neto
5  Data: 28/10/2023
    
```

```
6 """
7 import numpy as np
8 from numpy import sin,pi,cos
9 import matplotlib.pyplot as plt
10
11 #Parametros
12 L1, L2, h = 0.1,0.4, 0.04 #[m] ;
13 theta=0.0
14 dtheta=0.1*pi/180
15 n=1200 #rpm ;
16 omega= n*2*pi/60 #rad/s
17 alpha=0.0 # rad/s^2
18 Theta=np.arange(theta,4*pi,dtheta)
19
20 xC=[]; Vcx=[] ; Acx=[] ;Theta_grad=[]; yBC=[]
21
22 for theta in Theta:
23
24     #Posição
25     xc = L1*cos(theta)+L2 ;      xC.append(xc)
26     y_bc=h-L1*sin(theta)      ; yBC.append(y_bc)
27     theta_grad=theta*180/pi
28     Theta_grad.append(theta_grad)
29     #Velocidade
30     yp_bc= -omega*L1*cos(theta)
31     vcx= -omega*L1*sin(theta)
32     Vcx.append(vcx)
33     #Aceleração
34     acx= -alpha*L1*sin(theta)-omega**2*L1*cos(theta)
35     ypp_bc= -alpha*L1*cos(theta)+omega**2*L1*sin(theta)
36     Acx.append(acx)
37
38 #####Gráficos####
39 #Posição
40 plt.figure(figsize=(8,3),dpi=300)
41 plt.plot(Theta_grad,xC, color='red',linewidth=1.5)
42 plt.ylabel('Xc [m]', fontsize=14) ; plt.xlabel('Theta [^\$]', fontsize=14)
43 plt.xticks(np.arange(0,720,step=20),minor=True) ;plt.xlim(0,720) ;
44 plt.grid(True)
45 #Velocidade
```

```
46 plt.figure(figsize=(8,3),dpi=300)
47 plt.plot(Theta_grad,Vcx, color='red',linewidth=1.5)
48 plt.ylabel('Vc [m/s]', fontsize=14);plt.xlabel('Theta [^\0$]', fontsize=14)
49 plt.xticks(np.arange(0,720,step=20),minor=True)
50 plt.xlim(0,720); plt.grid(True)
51 #Aceleração
52 plt.figure(figsize=(8,3),dpi=300)
53 plt.plot(Theta_grad,Acx, color='red',linewidth=1.5)
54 plt.ylabel('Acx [m/s^2]', fontsize=14); plt.xlabel('Theta [^\0$]', fontsize
    =14)
55 plt.xticks(np.arange(0,720,step=20),minor=True)
56 plt.xlim(0,720); plt.grid(True); plt.show()
```

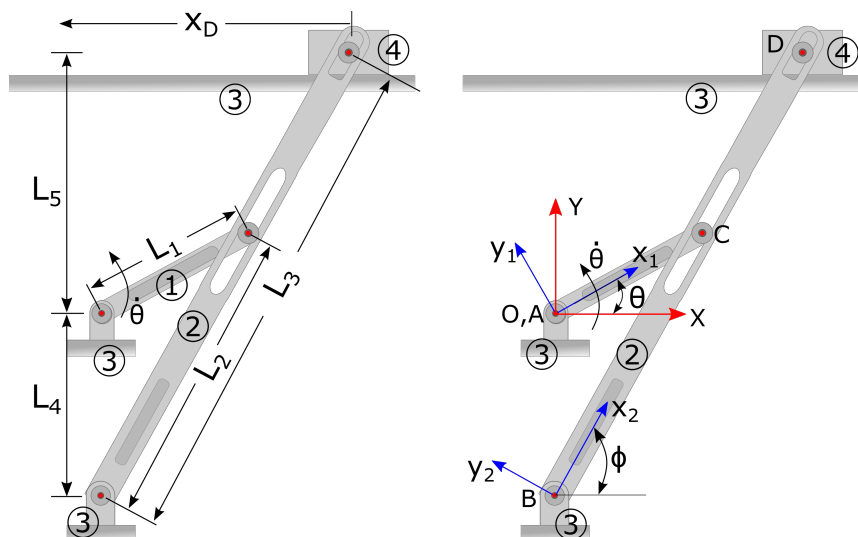
O código também encontra-se disponível no Github.

<https://raw.githubusercontent.com/GarfoEscoces.py>

2.3.3 Mecanismo de retorno rápido

O Mecanismo de Retorno Rápido foi apresentado na subseção 1.1.3 e uma de suas configurações pode ser observada no desenho esquemático da figura 2.16. Também nesta figura, podemos observar os referenciais inercial e móveis adotados para a resolução do problema.

Figura 2.16. Mecanismo de retorno rápido.



Fonte: Autor

Na resolução deste mecanismo vamos inicialmente considerar que sua configuração física é conhecida, ou seja, os comprimentos L_1 , L_4 , L_5 são conhecidos. Também são conhecidas a posição angular da manivela θ_1 e o mecanismo possui uma velocidade angular $\dot{\theta}_1$ constante,

fornecida por um motor elétrico. São apresentados na tabela 2.2 os parâmetros conhecidos e desconhecidos do mecanismo de retorno rápido.

Tabela 2.2. Parâmetros do mecanismo de Retorno Rápido

Conhecidos	Desconhecidos
$\theta_1, \omega_1, \alpha_1$	$\theta_2, \omega_2, \alpha_2$
L_1, L_4, L_5	$L_2(\theta_1), \dot{L}_2(\theta_1), \ddot{L}_2(\theta_1)$
	$L_3(\theta_1), \dot{L}_3(\theta_1), \ddot{L}_3(\theta_1)$

Depois de definidos os referenciais, como apresentado na figura 2.16, definimos as matrizes de transformadas de coordenadas com relação aos ângulos dos elementos do mecanismos (Equação 80) e os vetores de velocidade e aceleração angulares (Equação 81). Os vetores de posição (Equação 82), são descritos nos referenciais cuja representação seja a mais direta possível. E por último, os vetores velocidade e aceleração relativas são definidos na Equação 83.

$$T_{\theta}^{\top} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad T_{\phi}^{\top} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) & 0 \\ \text{sen}(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (80)$$

$${}_I\vec{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}; \quad {}_I\vec{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}; \quad {}_I\vec{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}_I\vec{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} \quad (81)$$

$${}_{M1}\vec{r}_{AB} = \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}_{M2}\vec{r}_{BC} = \begin{bmatrix} L_2(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}_I\vec{r}_{OB} = \begin{bmatrix} 0 \\ -L_4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (82)$$

$${}_{M2}\vec{v}_{relBC} = \begin{bmatrix} \dot{L}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}_{M2}\vec{a}_{relBC} = \begin{bmatrix} \ddot{L}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (83)$$

Posição

O vetor posição ${}^I\vec{r}_{OC}$ pode ser definido percorrendo dois caminhos, o caminho $O-A-C$ e o caminho $O-B-C$. Matematicamente temos,

Resolvendo para o caminho ($O-A-C$),

$${}^I\vec{r}_{OC} = \cancel{{}^I\vec{r}_{OA}} + \overset{0}{\vec{r}_{AC}} \Rightarrow {}^I\vec{r}_{OC} = T_{\theta}^{\top} \cdot M_1 \vec{r}_{AC} \quad (84)$$

Resolvendo para o caminho ($O-B-C$)

$${}^I\vec{r}_{OC} = {}^I\vec{r}_{OB} + {}^I\vec{r}_{BC} \Rightarrow {}^I\vec{r}_{OC} = {}^I\vec{r}_{OB} + T_{\phi}^{\top} \cdot M_2 \vec{r}_{BC} \quad (85)$$

Resolvendo os produtos,

$${}^I\vec{r}_{OC} = T_{\theta}^{\top} \cdot M_1 \vec{r}_{AC} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cdot \cos(\theta) \\ L_1 \cdot \text{sen}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (86)$$

$${}^I\vec{r}_{BC} = T_{\phi}^{\top} \cdot M_2 \vec{r}_{BC} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) & 0 \\ \text{sen}(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_2(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2(t) \cdot \cos(\phi) \\ L_2(t) \cdot \text{sen}(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (87)$$

Saindo da origem O , o destino é o mesmo independente do caminho percorrido, ou seja, o ponto de interesse C . Logo,

$$\begin{aligned} {}^I\vec{r}_{OC}(O-A-C) &= {}^I\vec{r}_{OC}(O-B-C) \\ \cancel{{}^I\vec{r}_{OA}} + \overset{0}{\vec{r}_{AC}} &= {}^I\vec{r}_{OB} + {}^I\vec{r}_{BC} \\ T_{\theta}^{\top} \cdot M_1 \vec{r}_{AC} &= {}^I\vec{r}_{OB} + T_{\phi}^{\top} \cdot M_2 \vec{r}_{BC} \end{aligned} \quad (88)$$

Substituindo as equações 86 e 87 no resultado acima, temos

$$\begin{bmatrix} L_1 \cdot \cos(\theta) \\ L_1 \cdot \text{sen}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -L_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_2(t) \cdot \cos(\phi) \\ L_2(t) \cdot \text{sen}(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (89)$$

O que resulta no sistema de equações apresentado em 90. Aqui temos um sistema com duas equações e duas incógnitas, ϕ e $L_2(t)$.

$$\begin{cases} L_1 \cdot \cos(\theta) = L_2(t) \cdot \cos(\phi) \\ L_1 \cdot \text{sen}(\theta) = L_2(t) \cdot \text{sen}(\phi) - L_4 \end{cases} \quad (90)$$

Resolvendo o sistema 90, obtemos

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{L_1 \cdot \text{sen}(\theta) + L_4}{L_1 \cdot \cos(\theta)} \right] \quad (91)$$

$$L_2(t) = \frac{L_1 \cdot \cos(\theta)}{\cos(\phi)} \quad (92)$$

Com o valor de ϕ conhecido podemos calcular a posição do ponto de interesse D .

$$\begin{aligned} {}_I\vec{r}_{OD} &= {}_I\vec{r}_{OB} + {}_I\vec{r}_{BD} \\ {}_I\vec{r}_{OD} &= {}_I\vec{r}_{OB} + T_\phi^\top \cdot M_2 \vec{r}_{BD} \end{aligned} \quad (93)$$

Resolvendo o produto $T_\phi^\top \cdot M_2 \vec{r}_{BD}$,

$$T_\phi^\top \cdot M_2 \vec{r}_{BD} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) & 0 \\ \text{sen}(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_3(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_3(t) \cdot \cos(\phi) \\ L_3(t) \cdot \text{sen}(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (94)$$

Substituindo cada vetor na equação 93, temos

$$\begin{bmatrix} x_D \\ L_5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -L_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_3(t) \cdot \cos(\phi) \\ L_3(t) \cdot \text{sen}(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (95)$$

O que resulta no sistema de equações a seguir

$$\begin{cases} x_D = L_3(t) \cdot \cos(\phi) \\ L_5 = L_3(t) \cdot \text{sen}(\phi) - L_4 \end{cases} \quad (96)$$

A resolução do sistema acima, fornece equações para calcularmos $L_3(t)$ e x_D .

$$L_3(t) = \frac{L_4 + L_5}{\text{sen}(\phi)}; \quad x_D = L_3(t) \cdot \cos(\phi) \quad (97)$$

Exemplo

Considere os seguintes valores para os parâmetros de posição: $L_1 = 0.1$ [m], $L_4 = 0.4$ [m], $L_5 = 0.2$ [m] e $0 \leq \theta \leq 4\pi$. A seguir são plotados alguns gráficos da posição do mecanismo.

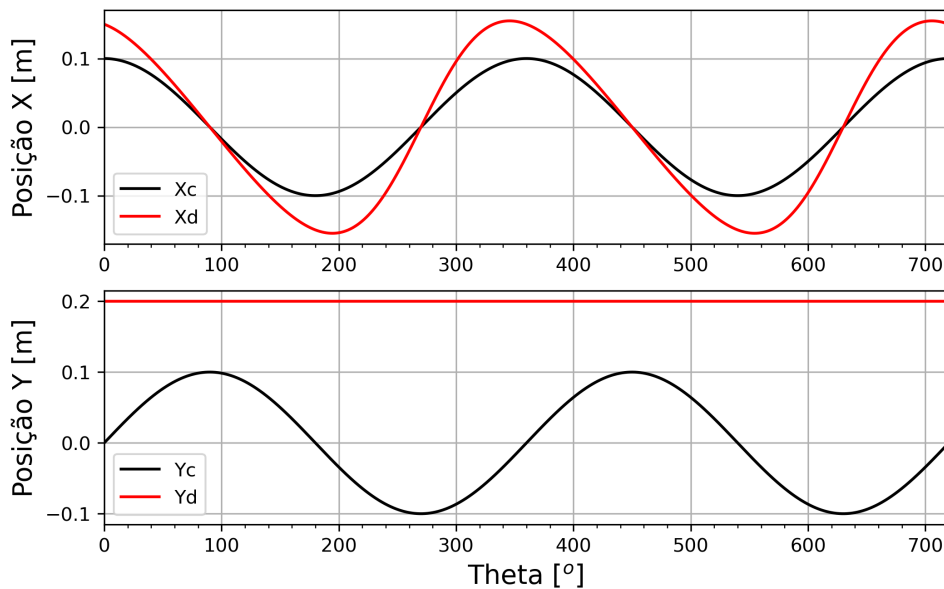


Figura 2.17. Posição em função do θ dos pontos C e D

Velocidade

O vetor velocidade ${}_I\vec{v}_C$ pode ser obtido resolvendo a cinemática para o caminho ($O-A-C$), partindo da origem do referencial, e igualando a resposta ao vetor ${}_I\vec{v}_C$ obtido com caminho ($O-B-C$).

$$\begin{aligned} {}_I\vec{v}_C &= \overset{0}{\cancel{I\vec{v}_A}} + {}_I\vec{\omega}_1 \times {}_I\vec{r}_{AC} + \overset{0}{\cancel{I\vec{v}_{relAC}}} \\ {}_I\vec{v}_C &= \overset{0}{\cancel{I\vec{v}_B}} + {}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC} + {}_I\vec{v}_{relBC} \end{aligned} \quad (98)$$

Como ${}_I\vec{v}_C = {}_I\vec{v}_C$, temos

$$\begin{aligned} {}_I\vec{\omega}_1 \times {}_I\vec{r}_{AC} &= {}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC} + {}_I\vec{v}_{relBC} \\ {}_I\vec{\omega}_1 \times T_\theta^\top \cdot M1\vec{r}_{AC} &= {}_I\vec{\omega}_2 \times T_\phi^\top \cdot M2\vec{r}_{BC} + T_\phi^\top \cdot M2\vec{v}_{relBC} \end{aligned} \quad (99)$$

Resolvendo cada termo da equação 99,

$${}_I\vec{\omega}_1 \times T_\theta^\top \cdot M1\vec{r}_{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ L_1 \cos(\theta) & L_1 \sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \cdot L_1 \sin(\theta) \\ \dot{\theta} \cdot L_1 \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (100)$$

$${}_I\vec{\omega}_2 \times T_\phi^\top \cdot M2\vec{r}_{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\phi} \\ L_2(t) \cdot \cos(\phi) & L_2(t) \cdot \sin(\phi) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\phi} \cdot L_2(t) \cdot \sin(\phi) \\ \dot{\phi} \cdot L_2(t) \cdot \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (101)$$

$$T_\phi^\top \cdot M2\vec{v}_{relBC} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{L}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{L}_2 \cos(\phi) \\ \dot{L}_2 \sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (102)$$

Substituindo as equações 100, 101, 102 na equação 99 temos,

$$\begin{bmatrix} -\dot{\theta}L_1 \text{sen}(\theta) \\ \dot{\theta}L_1 \text{cos}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\phi}L_2(t) \text{sen}(\phi) + \dot{L}_2 \text{cos}(\phi) \\ \dot{\phi}L_2(t) \text{cos}(\phi) + \dot{L}_2 \text{sen}(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (103)$$

Devemos resolver o sistema de equações abaixo para as incógnitas $\dot{\phi}$ e \dot{L}_2 .

$$\begin{cases} -\dot{\theta}L_1 \text{sen}(\theta) = -\dot{\phi}L_2(t) \cdot \text{sen}(\phi) + \dot{L}_2 \text{cos}(\phi) \\ \dot{\theta}L_1 \text{cos}(\theta) = \dot{\phi}L_2(t) \cdot \text{cos}(\phi) + \dot{L}_2 \text{sen}(\phi) \end{cases}$$

Obtendo,

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{\theta} \cdot L_1 \cdot \text{cos}(\theta - \phi)}{L_2(t)} \quad (104)$$

$$\dot{L}_2 = L_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \text{sen}(\phi - \theta) \quad (105)$$

Com os valores de $\dot{\phi}$ e \dot{L}_2 conhecidos, agora é possível calcular a velocidade do ponto D. O vetor velocidade ${}_I\vec{v}_D$ é,

$$\begin{aligned} {}_I\vec{v}_D &= \overset{0}{\cancel{{}_I\vec{v}_B}} + {}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{BD} + {}_I\vec{v}_{relBD} \\ {}_I\vec{v}_D &= {}_I\vec{\omega}_2 \times T_\phi^\top \cdot M_2\vec{r}_{BD} + T_\phi^\top \cdot M_2\vec{v}_{relBD} \end{aligned} \quad (106)$$

Resolvendo os termos da equação 106,

$${}_I\vec{\omega}_2 \times T_\phi^\top \cdot M_2\vec{r}_{BD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\phi} \\ L_3 \text{cos}(\phi) & L_3 \text{sen}(\phi) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\phi} \cdot L_3 \text{sen}(\phi) \\ \dot{\phi} \cdot L_3 \text{cos}(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (107)$$

$$T_\phi^\top \cdot M_2\vec{v}_{relBD} = \begin{bmatrix} \text{cos}(\phi) & -\text{sen}(\phi) & 0 \\ \text{sen}(\phi) & \text{cos}(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{L}_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{L}_3 \text{cos}(\phi) \\ \dot{L}_3 \text{sen}(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (108)$$

Substituindo as equações 107 e 108 na equação 106 e igualando à restrição cinemática ${}^I\vec{v}_D = [v_{Dx}; 0; 0]^T$, temos

$$\begin{bmatrix} v_{Dx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\phi}L_3(t) \operatorname{sen}(\phi) + \dot{L}_3 \cos(\phi) \\ \dot{\phi}L_3(t) \cos(\phi) + \dot{L}_3 \operatorname{sen}(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (109)$$

Resolvendo o sistema 109 obtemos,

$$\begin{aligned} \dot{L}_3 &= -\frac{\dot{\phi}L_3(t)}{\tan(\phi)} \\ v_{Dx} &= -\dot{\phi}L_3(t) \operatorname{sen}(\phi) + \dot{L}_3 \cos(\phi) \end{aligned} \quad (110)$$

Exemplo

O mecanismo da figura 2.16 possui $L_1 = 0.1$ [m], $L_4 = 0.4$ [m], $L_5 = 0.2$ [m] e uma velocidade angular da manivela (elo 1) de $n = 300$ [rpm]. Nas figuras 2.18 e 2.19 são apresentadas as velocidades dos pontos C e D, respectivamente, do mecanismos de retorno rápido para uma rotação $0 \leq \theta \leq 4\pi$ da manivela.

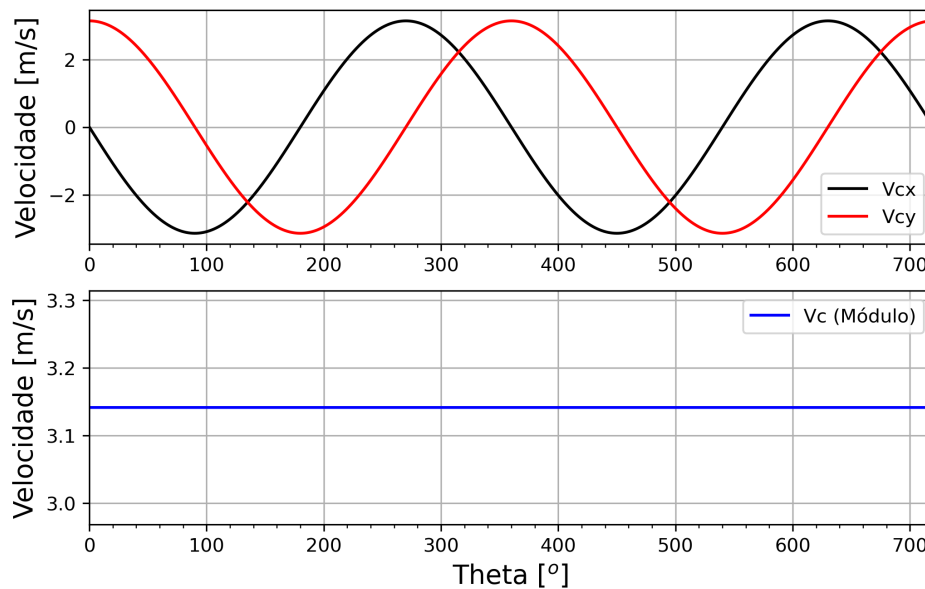


Figura 2.18. Velocidade do ponto C em função do θ .

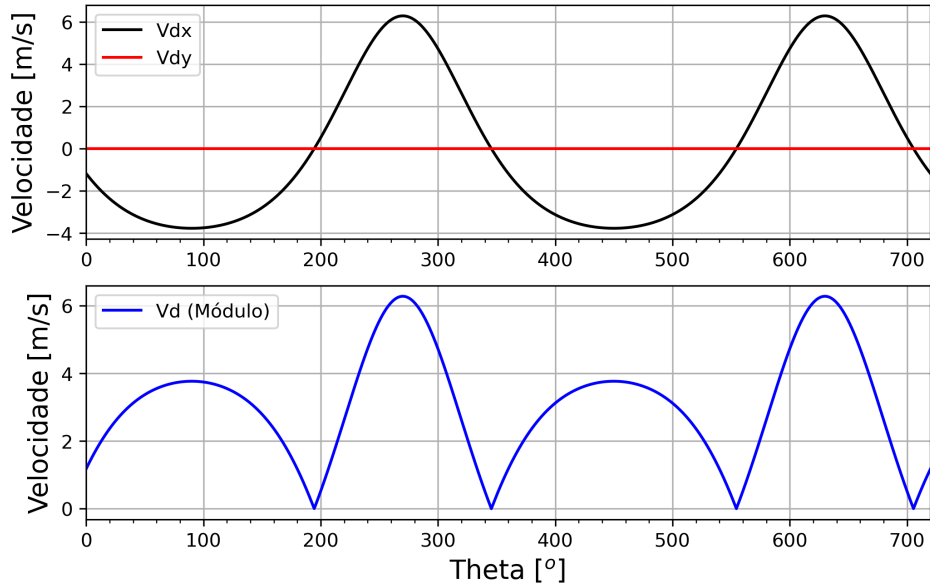


Figura 2.19. Velocidade do ponto D em função do θ .

Aceleração

O vetor aceleração ${}_I\vec{a}_C$ pode ser definido para o caminho $(O-A-C)$, como se segue

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{a}_C &= {}_I\vec{a}_A + {}_I\vec{\omega}_1 \times {}_I\vec{r}_{AC} + {}_I\vec{\omega}_1 \times ({}_I\vec{\omega}_1 \times {}_I\vec{r}_{AC}) + 2 {}_I\vec{\omega}_1 \times {}_I\vec{v}_{relAC} + {}_I\vec{a}_{relAC} \\
 {}_I\vec{a}_C &= {}_I\vec{\omega}_1 \times ({}_I\vec{\omega}_1 \times T_\theta^\top \cdot M1\vec{r}_{AC})
 \end{aligned} \tag{111}$$

E também pode ser definido com o caminho $(O-B-C)$,

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{a}_C &= {}_I\vec{a}_B + {}_I\vec{\alpha}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC} + {}_I\vec{\omega}_2 \times ({}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC}) + 2 {}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{v}_{relBC} + {}_I\vec{a}_{relBC} \\
 {}_I\vec{a}_C &= {}_I\vec{\alpha}_2 \times T_\phi^\top \cdot M2\vec{r}_{BC} + {}_I\vec{\omega}_2 \times ({}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC}) + 2 {}_I\vec{\omega}_2 \times T_\phi^\top \cdot M2\vec{v}_{relBC} + T_\phi^\top \cdot M2\vec{a}_{relBC}
 \end{aligned} \tag{112}$$

Como ${}_I\vec{a}_C = {}_I\vec{a}_C$ temos,

$${}_I\vec{\omega}_1 \times ({}_I\vec{\omega}_1 \times {}_I\vec{r}_{AC}) = {}_I\vec{\alpha}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC} + {}_I\vec{\omega}_2 \times ({}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC}) + 2 {}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{v}_{relBC} + {}_I\vec{a}_{relBC} \tag{113}$$

Resolvendo cada termo da equação 113,

$${}_I\vec{\omega}_1 \times ({}_I\vec{\omega}_1 \times {}_I\vec{r}_{AC}) = -\dot{\theta}^2 \cdot {}_I\vec{r}_{AC} \begin{bmatrix} -\dot{\theta}^2 L_1 \cos(\theta) \\ -\dot{\theta}^2 L_1 \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{114}$$

$${}_I\vec{\alpha}_2 \times T_\phi^\top \cdot M_2 \vec{r}_{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \ddot{\phi} \\ L_2 \cos(\phi) & L_2 \sin(\phi) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\phi} L_2 \sin(\phi) \\ \ddot{\phi} L_2 \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (115)$$

$${}_I\vec{\omega}_2 \times ({}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC}) = -\dot{\phi}^2 \cdot \vec{r}_{BC} = \begin{bmatrix} -\dot{\phi}^2 L_2 \cos(\phi) \\ -\dot{\phi}^2 L_2 \sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (116)$$

$$2\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{v}_{relBC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2\dot{\phi} \\ \dot{L}_2 \cos(\phi) & \dot{L}_2 \sin(\phi) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -2\dot{\phi}\dot{L}_2 \sin(\phi) \\ 2\dot{\phi}\dot{L}_2 \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (117)$$

$${}_I\vec{a}_{relBC} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{L}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{L}_2 \cdot \cos(\phi) \\ \ddot{L}_2 \cdot \sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (118)$$

Substituindo as equações de 114 a 118 na equação 113,

$$\begin{bmatrix} -\dot{\theta}^2 L_1 \cos(\theta) \\ -\dot{\theta}^2 L_1 \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\phi} L_2 \sin(\phi) - \dot{\phi}^2 L_2 \cos(\phi) - 2\dot{\phi}\dot{L}_2 \sin(\phi) + \ddot{L}_2 \cdot \cos(\phi) \\ \ddot{\phi} L_2 \cos(\phi) - \dot{\phi}^2 L_2 \sin(\phi) + 2\dot{\phi}\dot{L}_2 \cos(\phi) + \ddot{L}_2 \cdot \sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (119)$$

O que nos leva ao sistema 120, cuja as incógnitas são $\ddot{\phi}$ e \ddot{L}_2 .

$$\begin{cases} -\ddot{\phi} L_2 \sin(\phi) + \ddot{L}_2 \cdot \cos(\phi) = -\dot{\theta}^2 L_1 \cos(\theta) + \dot{\phi}^2 L_2 \cos(\phi) + 2\dot{\phi}\dot{L}_2 \sin(\phi) \\ \ddot{\phi} L_2 \cos(\phi) + \ddot{L}_2 \sin(\phi) = -\dot{\theta}^2 L_1 \sin(\theta) + \dot{\phi}^2 L_2 \sin(\phi) - 2\dot{\phi}\dot{L}_2 \cos(\phi) \end{cases} \quad (120)$$

Resolvendo o sistema de equações 120,

$$\begin{bmatrix} -L_2 \cdot \text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \\ L_2 \cdot \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{L}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (121)$$

Onde,

$$b_1 = -\dot{\theta}^2 \cdot L_1 \cdot \cos(\theta) + \dot{\phi}^2 \cdot L_2 \cdot \cos(\phi) + 2 \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{L}_2 \cdot \text{sen}(\phi)$$

$$b_2 = -\dot{\theta}^2 \cdot L_1 \cdot \text{sen}(\theta) + \dot{\phi}^2 \cdot L_2 \cdot \text{sen}(\phi) + 2 \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{L}_2 \cdot \cos(\phi)$$

Resultando em,

$$\ddot{\phi} = -\frac{1}{L_2} (b_1 \cdot \text{sen}(\phi) - b_2 \cdot \cos(\phi))$$

$$\ddot{L}_2 = b_2 \cdot \text{sen}(\phi) + b_1 \cdot \cos(\phi) \quad (122)$$

Agora com as equações para calcular os valores de $\ddot{\phi}$ e \ddot{L}_2 é possível obter a aceleração do ponto D.

$${}_I \vec{a}_D = \overset{0}{I} \vec{a}_B + {}_I \vec{\alpha}_2 \times {}_I \vec{r}_{BD} + {}_I \vec{\omega}_2 \times ({}_I \vec{\omega}_2 \times {}_I \vec{r}_{BD}) + 2 {}_I \vec{\omega}_2 \times {}_I \vec{v}_{relBD} + {}_I \vec{a}_{relBD}$$

$${}_I \vec{a}_D = {}_I \vec{\alpha}_2 \times T_\phi^\top \cdot M_2 \vec{r}_{BD} + {}_I \vec{\omega}_2 \times ({}_I \vec{\omega}_2 \times {}_I \vec{r}_{BD}) + 2 {}_I \vec{\omega}_2 \times T_\phi^\top \cdot M_2 \vec{v}_{relBD} + T_\phi^\top \cdot M_2 \vec{a}_{relBD} \quad (123)$$

Resolvendo cada termo da equação 123,

$${}_I \vec{\alpha}_2 \times T_\phi^\top \cdot M_2 \vec{r}_{BD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \ddot{\phi} \\ L_3 \cos(\phi) & L_3 \text{sen}(\phi) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\phi} L_3 \text{sen}(\phi) \\ \ddot{\phi} L_3 \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (124)$$

$${}_I \vec{\omega}_2 \times ({}_I \vec{\omega}_2 \times {}_I \vec{r}_{BD}) = -\dot{\phi}^2 \cdot {}_I \vec{r}_{BD} = \begin{bmatrix} -\dot{\phi}^2 L_3 \cos(\phi) \\ -\dot{\phi}^2 L_3 \text{sen}(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (125)$$

$$2\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{v}_{relBD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2\dot{\phi} \\ \dot{L}_3 \cos(\phi) & \dot{L}_3 \sin(\phi) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -2\dot{\phi}\dot{L}_3 \sin(\phi) \\ 2\dot{\phi}\dot{L}_3 \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (126)$$

$${}_I\vec{a}_{relBD} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{L}_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{L}_3 \cos(\phi) \\ \ddot{L}_3 \sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (127)$$

Substituindo as equações de 124 a 127 na equação 123 e igualando à restrição cinemática $\vec{a}_D = [a_{Dx}; 0; 0]^\top$,

$$\begin{bmatrix} a_{Dx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\phi} L_3 \sin(\phi) - \dot{\phi}^2 L_3 \cos(\phi) - 2\dot{\phi}\dot{L}_3 \sin(\phi) + \ddot{L}_3 \cos(\phi) \\ \ddot{\phi} L_3 \cos(\phi) - \dot{\phi}^2 L_3 \sin(\phi) + 2\dot{\phi}\dot{L}_3 \cos(\phi) + \ddot{L}_3 \sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (128)$$

O que nos leva ao sistema 129, cuja as incógnitas são a_{Dx} e \ddot{L}_3 .

$$\begin{cases} a_{Dx} = -\ddot{\phi} L_3 \sin(\phi) - \dot{\phi}^2 L_3 \cos(\phi) - 2\dot{\phi}\dot{L}_3 \sin(\phi) + \ddot{L}_3 \cos(\phi) \\ \ddot{L}_3 \sin(\phi) = -\ddot{\phi} L_3 \cos(\phi) + \dot{\phi}^2 L_3 \sin(\phi) - 2\dot{\phi}\dot{L}_3 \cos(\phi) \end{cases} \quad (129)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \ddot{L}_3 &= \frac{-\ddot{\phi} L_3}{\tan(\phi)} + \dot{\phi}^2 L_3 - \frac{2\dot{\phi}\dot{L}_3}{\tan(\phi)} \\ a_{Dx} &= -\ddot{\phi} L_3 \sin(\phi) - \dot{\phi}^2 L_3 \cos(\phi) - 2\dot{\phi}\dot{L}_3 \sin(\phi) + \ddot{L}_3 \cos(\phi) \end{aligned} \quad (130)$$

Exemplo

O mecanismo da figura 2.16 possui $L_1 = 0.1$ [m], $L_4 = 0.4$ [m], $L_5 = 0.2$ [m] e uma velocidade angular constante da manivela de $n = 300$ [rpm]. A aceleração angular da manivela é $\ddot{\theta} = 0$ [rad/s²]. Nas figuras 2.20 e 2.21 são apresentadas as acelerações dos pontos C e D, respectivamente, do mecanismos de retorno rápido para uma rotação $0 \leq \theta \leq 4\pi$ da manivela.

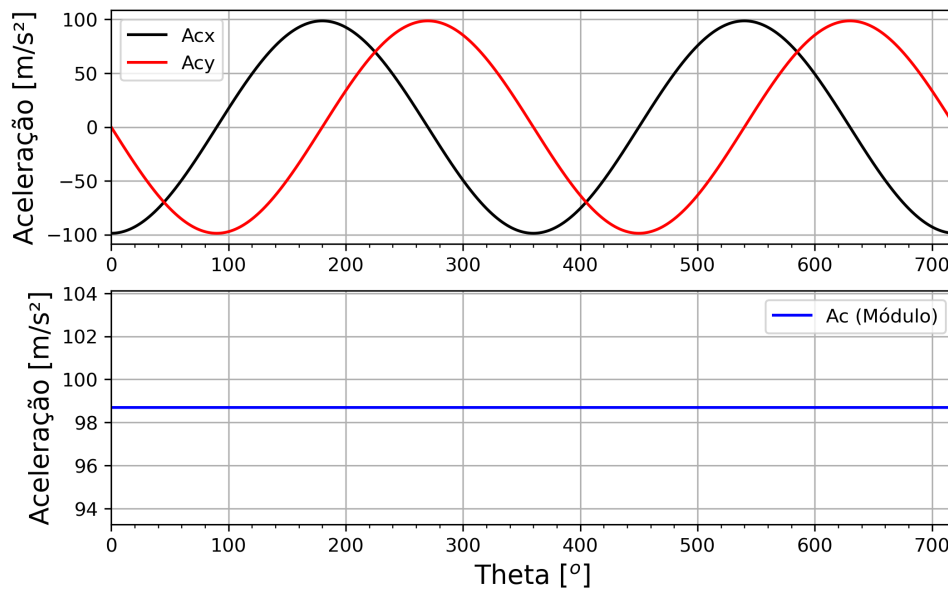


Figura 2.20. Aceleração do ponto C em função do θ .

Python

Abaixo é apresentado um código em Python utilizado para gerar os gráficos da posição, velocidade e aceleração do mecanismo de Retorno Rápido, mostrados nas subseções anteriores.

```
1  """
2  Instituto Federal do Rio Grande do Sul
3  Programa: Cinemática do Mecanismo de Retorno Rápido
4  Author: Prof. Dr. Felipe Rodrigues de Freitas Neto
5  Data: 13/08/2023
6  """
7  import numpy as np
8  from numpy import sin, pi, cos, tan
9  import matplotlib.pyplot as plt
10
11 #Parametros
12 L1, L4, L5 = 0.1, 0.4, 0.2 #[m]
13
14 n=300 #rpm
15 omega1= n*2*pi/60 #rad/s
16 alpha1=0.0 # rad/s^2
17 dTheta=0.101*pi/180
18 Theta=np.arange(0,4*pi,dTheta) ; Theta_grad=[]
19
20 # Posição
21 Phi=[] ; L2=[]
```

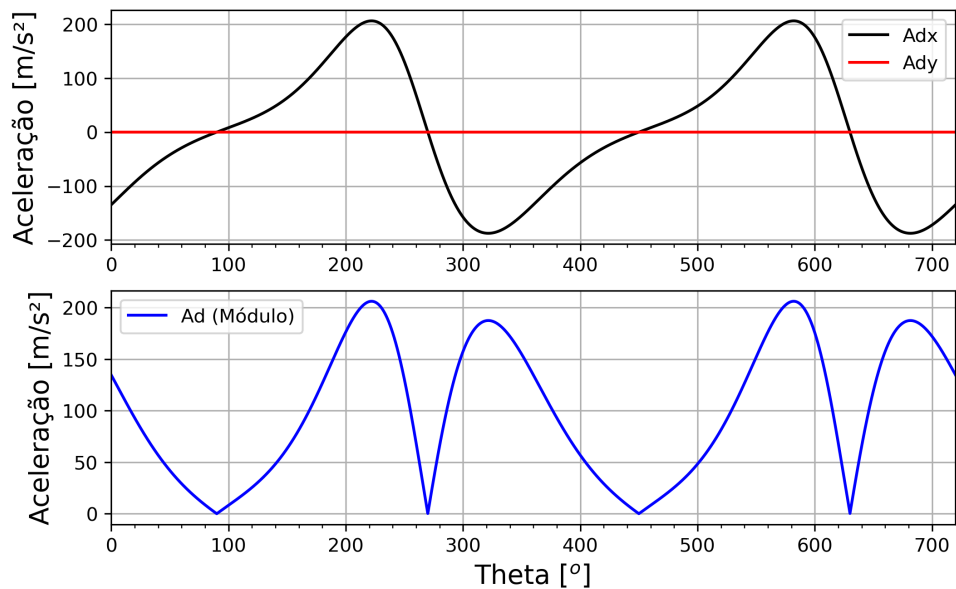



Figura 2.21. Aceleração do ponto D em função do θ .

```

22 Roc=np.empty((0,2),dtype=float) ; Rod=np.empty((0,2),dtype=float)
23 #Velocidade
24 Phip=[] #Derivada primeira de phi [rad/s]
25 L2p = [] #Derivada primeira de L2 [m/s]
26 Vc=np.empty((0,3),dtype=float) ; Vd=np.empty((0,3),dtype=float)
27 #Aceleração
28 Phipp=[] #Derivada segunda de phi [rad/s^2]
29 L2pp = [] #Derivada segunda de L2 [m/s^2]
30 Ac=np.empty((0,3),dtype=float) ; Ad=np.empty((0,3),dtype=float)
31
32 for theta in Theta:
33     theta_grad=(theta*180/pi)
34     #*****POSIÇÃO *****
35     #Ponto C
36     Rocx=L1*cos(theta)
37     Rocy=L1*sin(theta)
38     r_oc=np.array([Rocx,Rocy]); Roc=np.append(Roc,[r_oc],axis=0)
39     phi = np.arctan((L1*sin(theta)+L4)/(L1*cos(theta)))
40     l2= L1*cos(theta)/cos(phi)
41     #Ponto D
42     l3=(L4+L5)/sin(phi)
43     Rodx=l3*cos(phi)
44     Rody=L5
45     r_od=np.array([Rodx,Rody]); Rod=np.append(Rod,[r_od],axis=0)
46     Phi.append(phi) ; L2.append(l2)
    
```

```
47
48 *****VELOCIDADE *****
49 #Velocidade C
50     phip=(omega1*L1*cos(theta-phi))/(l2) ; Phip.append(phi)
51     l2p=omega1*L1*cos(theta)/sin(phi) - phip*l2/tan(phi) ; L2p.append(l2p)
52     Vcx=-omega1*L1*sin(theta)
53     Vcy= omega1*L1*cos(theta)
54     mod_vc=np.sqrt(Vcx**2+Vcy**2)
55     vc=np.array([Vcx,Vcy,mod_vc]) ; Vc=np.append(Vc,[vc],axis=0)
56 #Velocidade D
57     l3p= -phip*l3/tan(phi)
58     Vdx= -phip*l3*sin(phi) + l3p*cos(phi)
59     Vdy=0.0
60     mod_Vd=np.sqrt(Vdx**2+Vdy**2)
61     vd=np.array([Vdx,Vdy,mod_Vd]) ; Vd=np.append(Vd,[vd],axis=0)
62
63 *****ACELERAÇÃO *****
64 #Aceleração C
65     b1= -omega1**2*L1*cos(theta) + phip**2*l2*cos(phi) + 2*phip*l2p*sin(phi)
66     b2= -omega1**2*L1*sin(theta) + phip**2*l2*sin(phi) + 2*phip*l2p*sin(phi)
67     phipp= -(b1*sin(phi) - b2*cos(phi))/l2
68     l2pp= b2*sin(phi) + b1*cos(phi)
69     Acx= -omega1**2*L1*cos(theta)
70     Acy= -omega1**2*L1*sin(theta)
71     mod_Ac=np.sqrt(Acx**2+Acy**2)
72     ac=np.array([Acx,Acy,mod_Ac]) ; Ac=np.append(Ac,[ac],axis=0)
73 #Aceleração D
74     l3pp= -phipp*l3/tan(phi) +phipp**2*l3 -2*phipp*l3p/tan(phi)
75     Adx= -phipp*l3*sin(phi) -phipp**2*l3*cos(phi) -2*phipp*l3p*sin(phi) + l3pp
76         *cos(phi)
77     Ady= 0.0
78     mod_Ad=np.sqrt(Adx**2+Ady**2)
79     ad=np.array([Adx,Ady,mod_Ad]) ; Ad=np.append(Ad,[ad],axis=0)
80     Theta_grad.append(theta_grad)
81 ***** Gráficos de Posição *****
82 plt.figure(figsize=(8,5),dpi=300)
83 #Ponto C
84 plt.subplot(211)
85 plt.plot(Theta_grad,Roc[:,0], linewidth=1.5, color="black",label='Xc')
86 plt.plot(Theta_grad,Rod[:,0], linewidth=1.5, color="red",label='Xd')
```

```
86 plt.legend(loc='best') ; plt.xlim(0,720) ; plt.grid(True)
87 plt.ylabel('Posição X [m]', fontsize=14)
88 plt.xticks(np.arange(0,720,step=20),minor=True)
89 plt.subplot(212)
90 plt.plot(Theta_grad,Roc[:,1], linewidth=1.5, color="black",label='Yc')
91 plt.plot(Theta_grad,Rod[:,1], linewidth=1.5, color="red",label='Yd')
92 plt.legend(loc='best') ; plt.xlim(0,720) ; plt.grid(True)
93 plt.ylabel('Posição Y [m]', fontsize=14)
94 plt.xticks(np.arange(0,720,step=20),minor=True)
95 plt.xlabel('Theta [°]', fontsize=14) ; plt.show()
96 #Ponto D
97 plt.figure(figsize=(8,5),dpi=300)
98 plt.subplot(211)
99 plt.plot(Theta_grad,Ad[:,0], linewidth=1.5, color="black",label='Adx')
100 plt.plot(Theta_grad,Ad[:,1], linewidth=1.5, color="red",label='Ady')
101 plt.xlim(0,720) ; plt.legend(loc='best') ; plt.grid(True)
102 plt.xticks(np.arange(0,720,step=20),minor=True)
103 plt.ylabel('Aceleração [m/s^2]', fontsize=14)
104 plt.subplot(212)
105 plt.plot(Theta_grad,Ad[:,2], linewidth=1.5, color="blue",label='Ad (Módulo)')
106 plt.ylabel('Aceleração [m/s^2]', fontsize=14)
107 plt.xlim(0,720) ; plt.legend(loc='best') ; plt.grid(True)
108 plt.xticks(np.arange(0,720,step=20),minor=True)
109 plt.xlabel('Theta [°]', fontsize=14) ; plt.show()
```

O código também encontra-se disponível no Github.

<https://raw.githubusercontent.com/RetornoRapido.py>

2.3.4 Mecanismo de quatro barras

O mecanismo de quatro barras foi previamente apresentado na seção 1.1.4 e nesta seção vamos obter sua cinemática, iniciando pela posição, seguida da velocidade e da aceleração. Os parâmetros do mecanismo são apresentados na figura 2.22. Os parâmetros L_1 , L_2 , L_3 e L_4 são comprimentos conhecidos do mecanismo, θ_1 é o ângulo de entrada da manivela, assumido ser conhecido, assim como suas derivadas primeira $\dot{\theta}_1$ e segunda $\ddot{\theta}_1$, respectivamente velocidade e aceleração angulares. Os ângulos θ_2 e θ_3 , além de suas derivadas primeira ($\dot{\theta}_2$, $\dot{\theta}_3$) e segunda ($\ddot{\theta}_2$, $\ddot{\theta}_3$), são incógnitas a serem determinadas. Basicamente uma vez conhecidas essas incógnitas, podemos calcular a posição, a velocidade e a aceleração de qualquer ponto do mecanismo, para

qualquer instante de tempo, ou para qualquer ângulo de entrada θ_1 . Os referenciais inercial e móveis são apresentados na mesma figura. Reforçando a regra geral, a quantidade de elementos sofrendo rotação irá definir a quantidade de referenciais móveis de rotação e preferencialmente devemos posicionar esses referenciais nas articulações de rotação. Logo, teremos referenciais móveis nos pontos A, B e D, já o ponto C trata-se do ponto de interesse para o qual iremos determinar a cinemática.

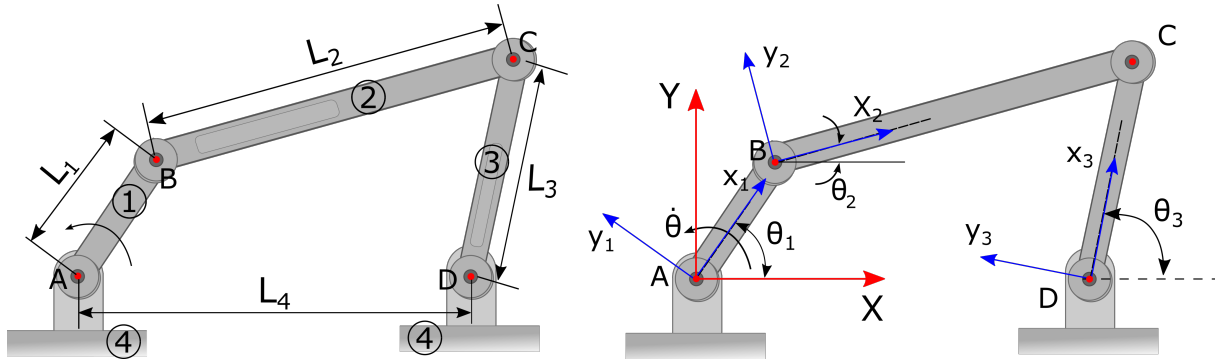


Figura 2.22. Mecanismo de quatro barras. Fonte: Autor.

Na tabela 2.3 são apresentados os parâmetros do mecanismos de quatro barras da figura 2.22, conhecidos e desconhecidos.

Tabela 2.3. Parâmetros do mecanismo de quatro barras.

Conhecidos	Desconhecidos
$\theta_1, L_1, L_2, L_3, L_4,$	θ_2, θ_3
ω_1	ω_2, ω_3
α_1	α_2, α_3

As matrizes de transformadas de coordenadas para o mecanismos da figura 2.22 são,

$$T_{\theta_1}^\top = \begin{bmatrix} C(\theta_1) & -S(\theta_1) & 0 \\ S(\theta_1) & C(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad T_{\theta_2}^\top = \begin{bmatrix} C(\theta_2) & -S(\theta_2) & 0 \\ S(\theta_2) & C(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad T_{\theta_3}^\top = \begin{bmatrix} C(\theta_3) & -S(\theta_3) & 0 \\ S(\theta_3) & C(\theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (131)$$

O vetores de velocidade e aceleraao angulares dos elos sao,

$${}_I\vec{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}; \quad {}_I\vec{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}; \quad {}_I\vec{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}; \quad {}_I\vec{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}; \quad {}_I\vec{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}; \quad {}_I\vec{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (132)$$

Posiao

Apos definido os referenciais, vamos definir alguns vetores de posiao, sao eles

$${}_{M_1}\vec{r}_{AB} = \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}_{M_2}\vec{r}_{BC} = \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}_{M_3}\vec{r}_{DC} = \begin{bmatrix} L_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}_I\vec{r}_{OD} = \begin{bmatrix} L_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (133)$$

O vetor posiao ${}_I\vec{r}_{OC}$ pode ser definido percorrendo os caminhos $(O-A-B-C)$ e o caminho $(O-D-C)$.

Resolvendo para o caminho $(O-A-B-C)$,

$$\begin{aligned} {}_I\vec{r}_{OC} &= \overset{0}{\cancel{{}_I\vec{r}_{OA}}} + {}_I\vec{r}_{AB} + {}_I\vec{r}_{BC} \\ {}_I\vec{r}_{OC} &= T_{\theta_1}^\top {}_{M_1}\vec{r}_{AB} + T_{\theta_2}^\top {}_{M_2}\vec{r}_{BC} \end{aligned} \quad (134)$$

Resolvendo para o caminho $(O-D-C)$,

$$\begin{aligned} {}_I\vec{r}_{OC} &= {}_I\vec{r}_{OD} + {}_I\vec{r}_{DC} \\ {}_I\vec{r}_{OC} &= {}_I\vec{r}_{OD} + T_{\theta_3}^\top {}_{M_3}\vec{r}_{DC} \end{aligned} \quad (135)$$

Igualando as equaoes

$$\begin{aligned} {}_I\vec{r}_{OC}(OABC) &= {}_I\vec{r}_{OC}(ODC) \\ T_{\theta_1}^\top {}_{M_1}\vec{r}_{OA} + T_{\theta_2}^\top {}_{M_2}\vec{r}_{BC} &= {}_I\vec{r}_{OD} + T_{\theta_3}^\top {}_{M_3}\vec{r}_{DC} \end{aligned} \quad (136)$$

Resolvendo cada termo, temos

$$T_{\theta_1}^\top M1 \vec{r}_{AB} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\text{sen}(\theta_1) & 0 \\ \text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cos(\theta_1) \\ L_1 \text{sen}(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (137)$$

$$T_{\theta_2}^\top M2 \vec{r}_{BC} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\text{sen}(\theta_2) & 0 \\ \text{sen}(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2 \cos(\theta_2) \\ L_2 \text{sen}(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (138)$$

$$T_{\theta_3}^\top M3 \vec{r}_{DC} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\text{sen}(\theta_3) & 0 \\ \text{sen}(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_3 \cos(\theta_3) \\ L_3 \text{sen}(\theta_3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (139)$$

Substituindo os resultados de 137, 138 e 139 na equação 136, temos

$$\begin{bmatrix} L_1 \cos(\theta_1) \\ L_1 \text{sen}(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_2 \cos(\theta_2) \\ L_2 \text{sen}(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_3 \cos(\theta_3) \\ L_3 \text{sen}(\theta_3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (140)$$

A equação 140 é um sistema não linear com duas equações e duas incógnitas, θ_2 e θ_3 .

$$\begin{cases} L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_2) & = L_3 \cos(\theta_3) + L_4 \\ L_1 \text{sen}(\theta_1) + L_2 \text{sen}(\theta_2) & = L_3 \text{sen}(\theta_3) \end{cases} \quad (141)$$

O sistema apresentado na equação 141 é um sistema de equações não lineares, mais especificamente um sistema de equações transcendentais, cuja resposta deve ser obtida usando algum método numérico, como exemplo pode ser usado o método de *Newton-Raphson*.

Método de Newton-Raphson

Nesta subseção é abordado o método de Newton Raphson. A explicação detalhada do método foge do nosso escopo, portanto é recomendado que o leitor procure estudar o método em livros de cálculo numérico, a saber recomenda-se o livro do Steven Chapra e Raymond

Canale: *Numerical Methods for Engineers* Chapra (2014).

Assumindo entao que o leitor conhece o metodo numerico, aqui iremos apenas aplica-lo ao mecanismo. Inicialmente vamos reescrever o sistema (141),

$$\begin{aligned}L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_2) - L_3 \cos(\theta_3) - L_4 &= 0 \\L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_2) - L_3 \sin(\theta_3) &= 0\end{aligned}\tag{142}$$

Em seguida vamos definir duas funoes, sa˜o elas $f_1(\theta_2, \theta_3)$ e $f_2(\theta_2, \theta_3)$,

$$\begin{aligned}f_1(\theta_2, \theta_3) &= L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_2) - L_3 \cos(\theta_3) - L_4 \\f_2(\theta_2, \theta_3) &= L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_2) - L_3 \sin(\theta_3)\end{aligned}\tag{143}$$

Temos entao que quando $\theta_2 = \theta_2^*$ e $\theta_3 = \theta_3^*$,

$$\begin{aligned}f_1(\theta_2^*, \theta_3^*) &= 0 \\f_2(\theta_2^*, \theta_3^*) &= 0\end{aligned}\tag{144}$$

onde θ_2^* e θ_3^* sa˜o valores otimos a serem encontrados.

Para achar estes valores otimos vamos inicialmente estimar aproximaoes para eles, de modo que possamos agora definir um erro de aproximaao $\Delta\theta$,

$$\begin{aligned}\Delta\theta_2 = \theta_2^* - \theta_2 \quad \therefore \quad \theta_2^* &= \theta_2 + \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 = \theta_3^* - \theta_3 \quad \therefore \quad \theta_3^* &= \theta_3 + \Delta\theta_3\end{aligned}\tag{145}$$

Neste caso, temos

$$\begin{aligned}f_1(\theta_2 + \Delta\theta_2, \theta_3 + \Delta\theta_3) &= 0 \\f_2(\theta_2 + \Delta\theta_2, \theta_3 + \Delta\theta_3) &= 0\end{aligned}\tag{146}$$

A equaao acima clama por uma aplicaao da srie de Taylor.

Serie de Taylor

$$f(x + \Delta x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx} \Delta x + \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \frac{d^3 f(x_0)}{dx^3} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots$$

Aplicando a série de Taylor e truncando os termos de ordem superior,

$$\begin{aligned} f_1(\theta_2 + \Delta\theta_2, \theta_3 + \Delta\theta_3) &= f_1(\theta_2, \theta_3) + \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} \Delta\theta_2 + \frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} \Delta\theta_3 \\ f_2(\theta_2 + \Delta\theta_2, \theta_3 + \Delta\theta_3) &= f_2(\theta_2, \theta_3) + \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} \Delta\theta_2 + \frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} \Delta\theta_3 \end{aligned} \quad (147)$$

Então temos,

$$\begin{aligned} f_1(\theta_2, \theta_3) + \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} \Delta\theta_2 + \frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} \Delta\theta_3 &\approx 0 \\ f_2(\theta_2, \theta_3) + \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} \Delta\theta_2 + \frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} \Delta\theta_3 &\approx 0 \end{aligned} \quad (148)$$

A equação 148 pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} \Delta\theta_2 + \frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} \Delta\theta_3 &\approx -f_1(\theta_2, \theta_3) \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} \Delta\theta_2 + \frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} \Delta\theta_3 &\approx -f_2(\theta_2, \theta_3) \end{aligned} \quad (149)$$

ou ainda no formato $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1(\theta_2, \theta_3) \\ -f_2(\theta_2, \theta_3) \end{bmatrix} \quad (150)$$

A matriz A na equação 150 é conhecida como matriz Jacobiana. O conjunto de equações apresentado em 149 e em 150, é um sistema linear com duas equações e duas incógnitas e pode ser resolvido usando o método de Cramer.

Os termos da Jacobiana são resolvidos para o sistema 143

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} = -L_2 \operatorname{sen}(\theta_2) & \quad \frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} = L_3 \operatorname{sen}(\theta_3) \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} = L_2 \operatorname{cos}(\theta_2) & \quad \frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} = -L_3 \operatorname{cos}(\theta_3) \end{aligned} \quad (151)$$

Façamos,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -L_2 \operatorname{sen}(\theta_2) & L_3 \operatorname{sen}(\theta_3) \\ L_2 \operatorname{cos}(\theta_2) & -L_3 \operatorname{cos}(\theta_3) \end{vmatrix} = L_2 L_3 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3) \quad (152)$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} -f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} \\ -f_2 & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -f_1 & L_3 \operatorname{sen}(\theta_3) \\ -f_2 & -L_3 \operatorname{cos}(\theta_3) \end{vmatrix} = L_3(f_1 \operatorname{cos}(\theta_3) + f_2 \operatorname{sen}(\theta_3)) \quad (153)$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} & -f_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} & -f_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -L_2 \operatorname{sen}(\theta_2) & -f_1 \\ L_2 \operatorname{cos}(\theta_2) & -f_2 \end{vmatrix} = L_2(f_1 \operatorname{cos}(\theta_2) + f_2 \operatorname{sen}(\theta_2)) \quad (154)$$

Com os resultados de 152, 153 e 154, temos

$$\begin{aligned} \Delta\theta_2 &= \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{L_3(f_1 \operatorname{cos}(\theta_3) + f_2 \operatorname{sen}(\theta_3))}{L_2 L_3 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3)} \\ \Delta\theta_3 &= \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{L_2(f_1 \operatorname{cos}(\theta_2) + f_2 \operatorname{sen}(\theta_2))}{L_2 L_3 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3)} \end{aligned} \quad (155)$$

Os valores obtidos para $\Delta\theta_2$ e $\Delta\theta_3$ são usados para calcular $\theta_2 = \theta_2^*$ e $\theta_3 = \theta_3^*$, de modo iterativo. A seguir é apresentado um algoritmo generalizado para a obtenção desses valores.

Tabela 2.4. Algoritmo para a obtenção dos θ_2 e θ_3

Declarar variáveis: $\theta_1, \theta_2, \theta_3, L_1, L_2, L_3, L_4, \dots$
Iniciar as variáveis
Fazer enquanto ($\text{erro} \geq \text{tolerância}$)
Calcule
 $f_i =$
 $\frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} =$
 $\Delta\theta_j =$
 $\theta_j = \theta_j + \Delta\theta_j$
 $\text{erro}(j) =$
Fim do laço Fazer Enquanto

Exemplo

Considere os seguintes valores para os parâmetros da figura 2.22: $L_1 = 0.1$ [m], $L_2 = 0.4$ [m], $L_3 = 0.3$ [m] e $L_4 = 0.3$ [m]. Qualquer um dos lados da equação 140 pode ser usada para determinar a posição do ponto C. Reforço que para usar a equação mencionada, os valores de θ_2 e θ_3 devem ser obtidos com algum método numérico. Abaixo são apresentados gráficos de posição dos pontos B e C.

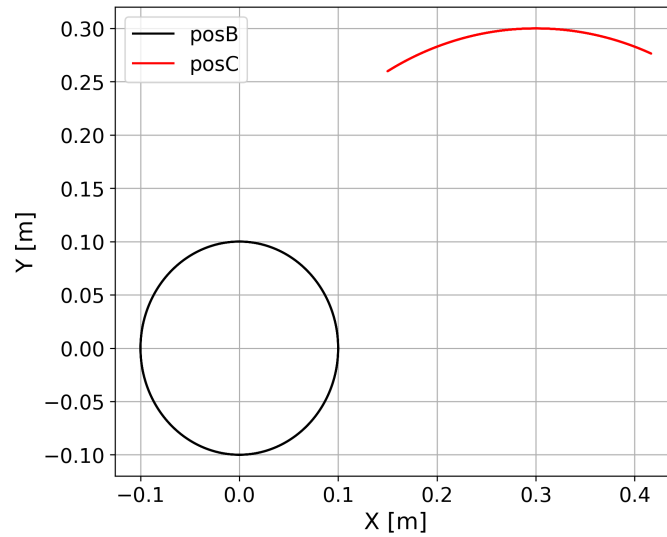


Figura 2.23. Trajetória dos pontos B e C.

Velocidade

O vetor velocidade ${}_I\vec{v}_C$ pode ser obtido resolvendo a cinemática para o caminho $(OABC)$, partindo da origem do referencial, e igualando a resposta ao vetor ${}_I\vec{v}_C$ obtido com o caminho (ODC) .

Caminho $(OABC)$,

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{v}_C &= {}_I\vec{v}_B + {}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC} + \overset{0}{\mathcal{P}}\vec{v}_{relBC} \\
 {}_I\vec{v}_B &= \overset{0}{\mathcal{P}}\vec{v}_A + {}_I\vec{\omega}_1 \times {}_I\vec{r}_{AB} + \overset{0}{\mathcal{P}}\vec{v}_{relAB} \\
 {}_I\vec{v}_C &= {}_I\vec{\omega}_1 \times {}_I\vec{r}_{AB} + {}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC}
 \end{aligned} \tag{156}$$

Caminho (ODC) ,

$${}_I\vec{v}_C = \overset{0}{\mathcal{P}}\vec{v}_D + {}_I\vec{\omega}_3 \times {}_I\vec{r}_{DC} + \overset{0}{\mathcal{P}}\vec{v}_{relDC} \tag{157}$$

Como ${}_I\vec{v}_C(OABC) = {}_I\vec{v}_C(ODC)$ temos,

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{v}_C &= {}_I\vec{v}_C \\
 {}_I\vec{\omega}_1 \times {}_I\vec{r}_{AB} + {}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC} &= {}_I\vec{\omega}_3 \times {}_I\vec{r}_{DC}
 \end{aligned} \tag{158}$$

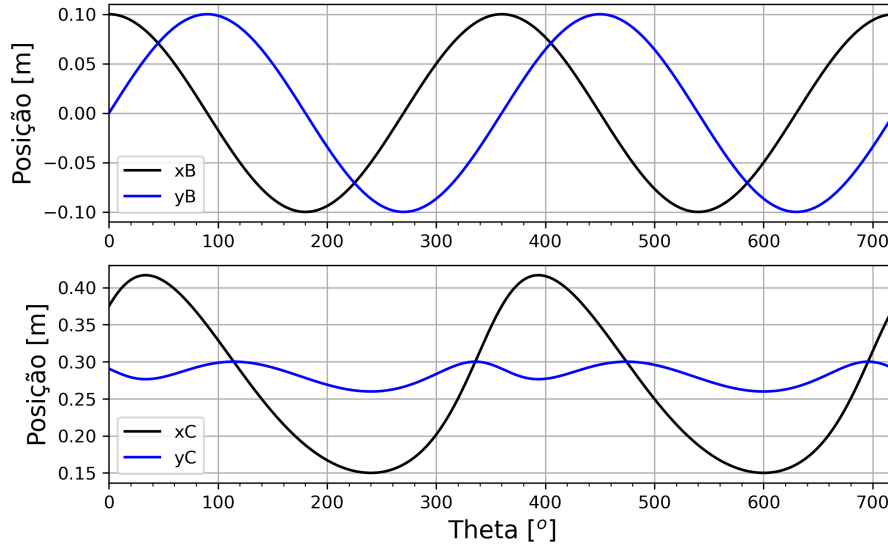


Figura 2.24. Posição em função do θ dos pontos B e C

Resolvendo cada termo da equação 158,

$${}_I\vec{\omega}_1 \times_I \vec{r}_{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \\ L_1 \cos(\theta_1) & L_1 \sin(\theta_1) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 L_1 \sin(\theta_1) \\ \dot{\theta}_1 L_1 \cos(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (159)$$

$${}_I\vec{\omega}_2 \times_I \vec{r}_{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \\ L_2 \cos(\theta_2) & L_2 \sin(\theta_2) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 L_2 \sin(\theta_2) \\ \dot{\theta}_2 L_2 \cos(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (160)$$

$${}_I\vec{\omega}_3 \times_I \vec{r}_{DC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_3 \\ L_3 \cos(\theta_3) & L_3 \sin(\theta_3) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_3 L_3 \sin(\theta_3) \\ \dot{\theta}_3 L_3 \cos(\theta_3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (161)$$

Utilizando os resultados das equações 159, 160 e 161 na equação 158, temos

$$\begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 L_1 \sin(\theta_1) \\ \dot{\theta}_1 L_1 \cos(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 L_2 \sin(\theta_2) \\ \dot{\theta}_2 L_2 \cos(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_3 L_3 \sin(\theta_3) \\ \dot{\theta}_3 L_3 \cos(\theta_3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (162)$$

A equação 162 pode ser reorganizada na equação 163, colocando os termos com as incógnitas

$\dot{\theta}_2$ e $\dot{\theta}_3$ no primeiro membro.

$$\begin{cases} -\dot{\theta}_2 L_2 \operatorname{sen}(\theta_2) + \dot{\theta}_3 L_3 \operatorname{sen}(\theta_3) & = \dot{\theta}_1 L_1 \operatorname{sen}(\theta_1) \\ \dot{\theta}_2 L_2 \operatorname{cos}(\theta_2) - \dot{\theta}_3 L_3 \operatorname{cos}(\theta_3) & = -\dot{\theta}_1 L_1 \operatorname{sen}(\theta_1) \end{cases} \quad (163)$$

Reorganizando no formato $A\vec{x} = \vec{b}$,

$$\begin{bmatrix} -L_2 \operatorname{sen}(\theta_2) & L_3 \operatorname{sen}(\theta_3) \\ L_2 \operatorname{cos}(\theta_2) & -L_3 \operatorname{cos}(\theta_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 L_1 \operatorname{sen}(\theta_1) \\ -\dot{\theta}_1 L_1 \operatorname{cos}(\theta_1) \end{bmatrix} \quad (164)$$

Resolvendo a equação 164 pelo método de Cramer,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -L_2 \operatorname{sen}(\theta_2) & L_3 \operatorname{sen}(\theta_3) \\ L_2 \operatorname{cos}(\theta_2) & -L_3 \operatorname{cos}(\theta_3) \end{vmatrix} = L_2 L_3 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3) \quad (165)$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} \dot{\theta}_1 L_1 \operatorname{sen}(\theta_1) & L_3 \operatorname{sen}(\theta_3) \\ -\dot{\theta}_1 L_1 \operatorname{cos}(\theta_1) & -L_3 \operatorname{cos}(\theta_3) \end{vmatrix} = \dot{\theta}_1 L_1 L_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_1) \quad (166)$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} -L_2 \operatorname{sen}(\theta_2) & \dot{\theta}_1 L_1 \operatorname{sen}(\theta_1) \\ L_2 \operatorname{cos}(\theta_2) & -\dot{\theta}_1 L_1 \operatorname{cos}(\theta_1) \end{vmatrix} = \dot{\theta}_1 L_1 L_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) \quad (167)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_2 &= \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\dot{\theta}_1 L_1 L_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_1)}{L_2 L_3 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3)} \\ \dot{\theta}_3 &= \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\dot{\theta}_1 L_1 L_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{L_2 L_3 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3)} \end{aligned} \quad (168)$$

Logo, com os resultados obtidos na equação 168 podemos utilizar qualquer um dos membros da equação 162 para calcular a velocidade do ponto C para qualquer ângulo de entrada da manivela.

Exemplo

Considere os seguintes valores para os parâmetros da figura 2.22: $L_1 = 0.1$ [m], $L_2 = 0.4$ [m], $L_3 = 0.3$ [m] e $L_4 = 0.3$ [m]. A manivela (elo 1) rotaciona no sentido anti-horário com velocidade angular constante igual a 1200 rpm. Abaixo são apresentados gráficos de velocidade

dos pontos B e C.

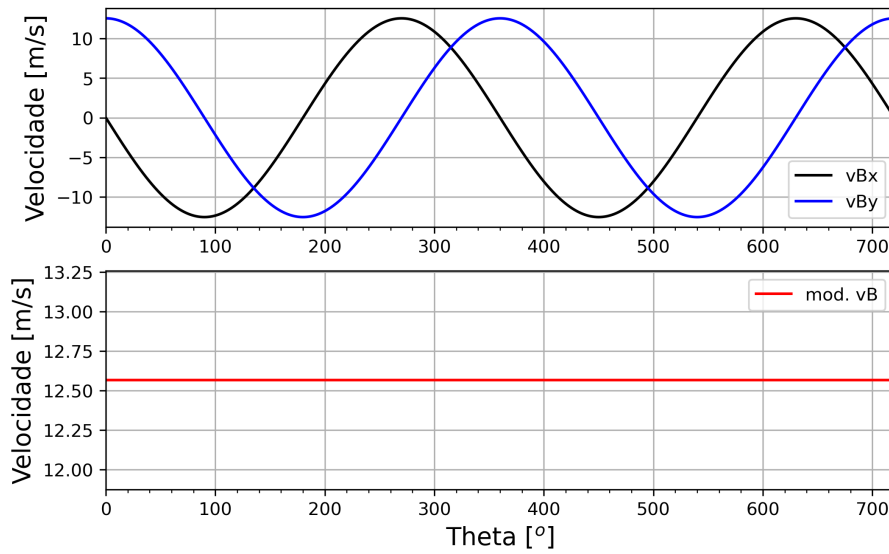


Figura 2.25. Velocidade do ponto B.

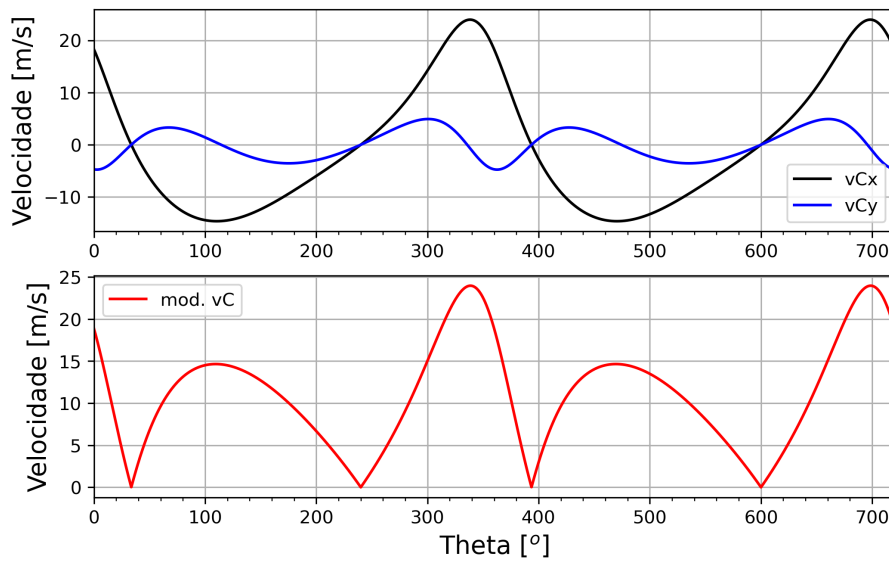


Figura 2.26. Velocidade do ponto C.

Aceleração

O vetor aceleração ${}_I\vec{a}_C$ pode ser definido para o caminho $(OABC)$, como se segue

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{a}_C &= {}_I\vec{a}_B + {}_I\vec{\alpha}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC} + {}_I\vec{\omega}_2 \times ({}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC}) + 2 {}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{v}_{relBC} + {}_I\vec{a}_{relBC} \\
 {}_I\vec{a}_C &= {}_I\vec{a}_B + {}_I\vec{\alpha}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC} + {}_I\vec{\omega}_2 \times ({}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC})
 \end{aligned} \tag{169}$$

Já o vetor ${}_I\vec{a}_B$ é definido pela equação 170,

$$\begin{aligned} {}_I\vec{a}_B &= \vec{a}_A^0 + \vec{\alpha}_1^0 \times {}_I\vec{r}_{AB} + {}_I\vec{\omega}_1 \times ({}_I\vec{\omega}_1 \times {}_I\vec{r}_{AB}) + 2 {}_I\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_{relAB}^0 + \vec{a}_{relAB}^0 \\ {}_I\vec{a}_B &= {}_I\vec{\omega}_1 \times ({}_I\vec{\omega}_1 \times {}_I\vec{r}_{AB}) \end{aligned} \quad (170)$$

Na equação acima foi considerado que a manivela (elo 1) possui uma velocidade angular constante, com isso a sua derivada, a aceleração angular, é nula.

Obtendo o vetor ${}_I\vec{a}_C$ pelo caminho ODC ,

$$\begin{aligned} {}_I\vec{a}_C &= \vec{a}_D^0 + {}_I\vec{\alpha}_3 \times {}_I\vec{r}_{DC} + {}_I\vec{\omega}_3 \times ({}_I\vec{\omega}_3 \times {}_I\vec{r}_{DC}) + 2 {}_I\vec{\omega}_3 \times \vec{v}_{RelDC}^0 + \vec{a}_{RelDC}^0 \\ {}_I\vec{a}_C &= {}_I\vec{\alpha}_3 \times {}_I\vec{r}_{DC} + {}_I\vec{\omega}_3 \times ({}_I\vec{\omega}_3 \times {}_I\vec{r}_{DC}) \end{aligned} \quad (171)$$

As equações de vínculo nos diz que ${}_I\vec{a}_C(OABC)$ é igual a ${}_I\vec{a}_C(ODC)$

$$\begin{aligned} {}_I\vec{a}_C &= {}_I\vec{a}_C \\ {}_I\vec{a}_B + {}_I\vec{\alpha}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC} + {}_I\vec{\omega}_2 \times ({}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC}) &= {}_I\vec{\alpha}_3 \times {}_I\vec{r}_{DC} + {}_I\vec{\omega}_3 \times ({}_I\vec{\omega}_3 \times {}_I\vec{r}_{DC}) \end{aligned} \quad (172)$$

Resolvendo cada termo da equação 172 temos,

$${}_I\vec{\omega}_1 \times ({}_I\vec{\omega}_1 \times {}_I\vec{r}_{AB}) = -\dot{\theta}_1^2 \cdot {}_I\vec{r}_{AB} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1^2 L_1 \cos(\theta_1) \\ -\dot{\theta}_1^2 L_1 \sen(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (173)$$

$${}_I\vec{\omega}_2 \times ({}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC}) = -\dot{\theta}_2^2 \cdot {}_I\vec{r}_{BC} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2^2 L_2 \cos(\theta_2) \\ -\dot{\theta}_2^2 L_2 \sen(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (174)$$

$${}_I\vec{\omega}_3 \times ({}_I\vec{\omega}_3 \times {}_I\vec{r}_{DC}) = -\dot{\theta}_3^2 \cdot {}_I\vec{r}_{DC} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_3^2 L_3 \cos(\theta_3) \\ -\dot{\theta}_3^2 L_3 \sen(\theta_3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (175)$$

$${}_I\vec{\alpha}_2 \times_I \vec{r}_{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \ddot{\theta}_2 \\ L_2 \cos(\theta_2) & L_2 \sin(\theta_2) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_2 L_2 \sin(\theta_2) \\ \ddot{\theta}_2 L_2 \cos(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (176)$$

$${}_I\vec{\alpha}_3 \times_I \vec{r}_{DC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \ddot{\theta}_3 \\ L_3 \cos(\theta_3) & L_3 \sin(\theta_3) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_3 L_3 \sin(\theta_3) \\ \ddot{\theta}_3 L_3 \cos(\theta_3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (177)$$

Substituindo as equações 173, 174, 175, 176 e 177 na equação 172,

$$\begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1^2 L_1 \cos(\theta_1) - \ddot{\theta}_2 L_2 \sin(\theta_2) - \dot{\theta}_2^2 L_2 \cos(\theta_2) \\ -\dot{\theta}_1^2 L_1 \sin(\theta_1) + \ddot{\theta}_2 L_2 \cos(\theta_2) - \dot{\theta}_2^2 L_2 \sin(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_3 L_3 \sin(\theta_3) - \dot{\theta}_3^2 L_3 \cos(\theta_3) \\ \ddot{\theta}_3 L_3 \cos(\theta_3) - \dot{\theta}_3^2 L_3 \sin(\theta_3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (178)$$

Reorganizando o sistema 178 para as incógnitas $\ddot{\theta}_2$ e $\ddot{\theta}_3$,

$$\begin{cases} -\ddot{\theta}_2 L_2 \sin(\theta_2) + \ddot{\theta}_3 L_3 \sin(\theta_3) & = \dot{\theta}_1^2 L_1 \cos(\theta_1) + \dot{\theta}_2^2 L_2 \cos(\theta_2) - \dot{\theta}_3^2 L_3 \cos(\theta_3) \\ \ddot{\theta}_2 L_2 \cos(\theta_2) - \ddot{\theta}_3 L_3 \cos(\theta_3) & = \dot{\theta}_1^2 L_1 \sin(\theta_1) + \dot{\theta}_2^2 L_2 \sin(\theta_2) - \dot{\theta}_3^2 L_3 \sin(\theta_3) \end{cases}$$

Reescrevendo no formato $A\vec{x} = \vec{b}$,

$$\begin{bmatrix} -L_2 \sin(\theta_2) & L_3 \sin(\theta_3) \\ L_2 \cos(\theta_2) & -L_3 \cos(\theta_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (179)$$

Onde,

$$\begin{aligned} b_1 &= \dot{\theta}_1^2 L_1 \cos(\theta_1) + \dot{\theta}_2^2 L_2 \cos(\theta_2) - \dot{\theta}_3^2 L_3 \cos(\theta_3) \\ b_2 &= \dot{\theta}_1^2 L_1 \sin(\theta_1) + \dot{\theta}_2^2 L_2 \sin(\theta_2) - \dot{\theta}_3^2 L_3 \sin(\theta_3) \end{aligned} \quad (180)$$

O sistema de equações 179 pode ser resolvido utilizando o método de Cramer,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -L_2 \sin(\theta_2) & L_3 \sin(\theta_3) \\ L_2 \cos(\theta_2) & -L_3 \cos(\theta_3) \end{vmatrix} = L_2 L_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \quad (181)$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} b_1 & L_3 \operatorname{sen}(\theta_3) \\ b_2 & -L_3 \operatorname{cos}(\theta_3) \end{vmatrix} = -L_3[b_1 \operatorname{cos}(\theta_3) + b_2 \operatorname{sen}(\theta_3)] \quad (182)$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} -L_2 \operatorname{sen}(\theta_2) & b_1 \\ L_2 \operatorname{cos}(\theta_2) & b_2 \end{vmatrix} = -L_2[b_1 \operatorname{cos}(\theta_2) + b_2 \operatorname{sen}(\theta_2)] \quad (183)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_2 &= \frac{-L_3[b_1 \operatorname{cos}(\theta_3) + b_2 \operatorname{sen}(\theta_3)]}{L_2 L_3 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3)} \\ \ddot{\theta}_3 &= \frac{-L_2[b_1 \operatorname{cos}(\theta_2) + b_2 \operatorname{sen}(\theta_2)]}{L_2 L_3 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3)} \end{aligned} \quad (184)$$

Exemplo

Considerando $L_1 = 0.1$ [m], $L_2 = 0.4$ [m], $L_3 = 0.3$ [m], $L_4 = 0.3$ [m] e uma rotação da manivela (elo 1) no sentido anti-horário com velocidade angular constante igual a 1200 rpm. Abaixo são apresentados gráficos da aceleração dos pontos B e C.

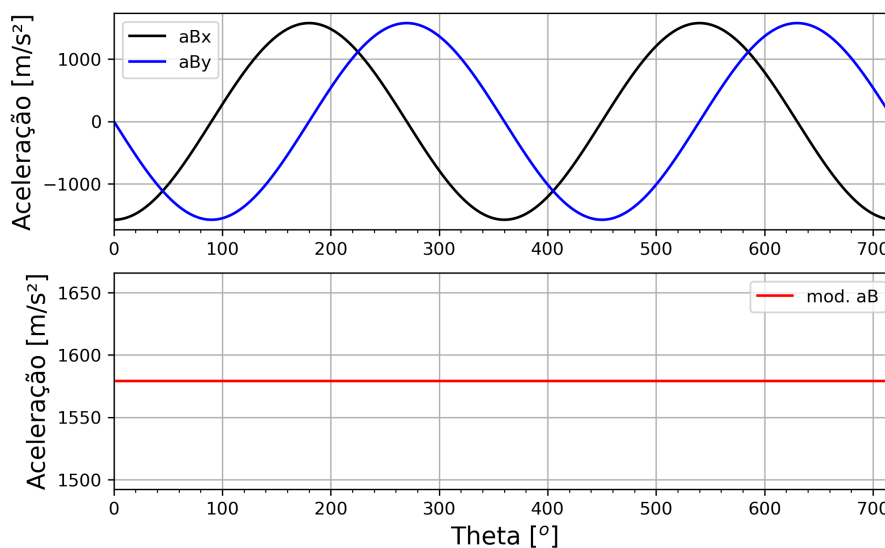


Figura 2.27. Aceleração do ponto B.

Python

O código em Python utilizado para gerar os gráficos da subseções anteriores é apresentado a seguir. Como a proposta do livro é utilizar a linguagem de programação Python com suas

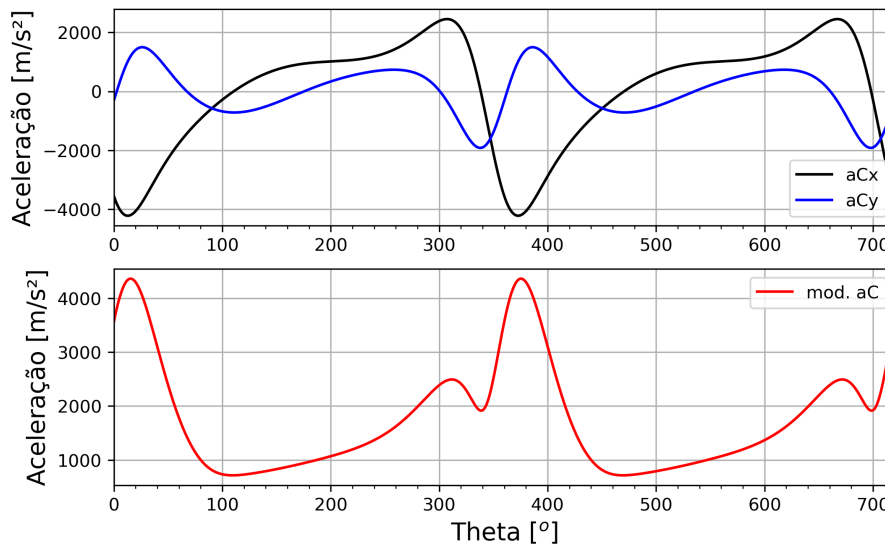


Figura 2.28. Aceleração do ponto C.

funções, classes e bibliotecas, o algoritmo anteriormente apresentado para o método de Newton Raphson não é implementado linha a linha, em vez disso é usado a biblioteca SciPy community (2023).

```
1  """
2  Instituto Federal do Rio Grande do Sul
3  Programa: Cinemática do Mecanismo de Quatro Barras
4  Author: Prof. Dr. Felipe Rodrigues de Freitas Neto
5  Data: 09/11/2023
6  """
7  import numpy as np
8  from numpy import pi,cos,sin
9  import matplotlib.pyplot as plt
10 from matplotlib.pyplot import grid,xlim,legend,plot,xlabel,ylabel
11 import random
12 from scipy.optimize import fsolve
13
14 posB=np.empty((0,3),dtype=float); posC=np.empty((0,3),dtype=float)
15 velB=np.empty((0,4),dtype=float); velC=np.empty((0,4),dtype=float)
16 acelB=np.empty((0,4),dtype=float); acelC=np.empty((0,4),dtype=float)
17
18 theta_1=0.01*pi/180 ; dTheta_1=0.1*pi/180 ; thetaFinal_1=4*pi
19 Theta1=np.arange(theta_1,thetaFinal_1,dTheta_1)
20
21 #Parametros
22 l1,l2,l3,l4=0.1,0.4,0.3,0.3
```

```
23 n=1200 #rpm
24 omega1= n*2*pi/60 #rad/s
25 alpha1=0 #rad/s^2
26 #Equação de Grashof
27 Max=12 ; Min=11
28 if ((Max+Min)>(l3+l4)):
29     print("Os comprimentos dos elos não satisfaz a condição de Grashof!")
30
31 #Equação não linear
32 def NonLinEqua(variables ,theta_1):
33     theta_2 ,theta_3=variables
34     f1 = 12*cos(theta_2)-13*cos(theta_3)+11*cos(theta_1)-14
35     f2 = 12*sin(theta_2)-13*sin(theta_3)+11*sin(theta_1)
36     return [f1, f2]
37
38 #Estimativas iniciais para theta_2 e theta_3
39 theta_2=random.random() ; theta_3=random.random()
40
41 for theta_1 in Theta1:
42     #Posição do Ponto B
43     xB=11*cos(theta_1) ; yB=11*sin(theta_1)
44     thetaGraus_1=theta_1*180/pi
45     pB=np.array([thetaGraus_1 ,xB ,yB])
46     posB=np.append(posB ,([pB]),axis=0)
47     #Posição do Ponto C
48     estimInicial = np.array([theta_2 , theta_3])
49     theta_2 ,theta_3 = fsolve(NonLinEqua ,estimInicial ,args=(theta_1),xtol=1e
50         -08)
51     xC1=xB+12*cos(theta_2) ; yC1=yB+12*sin(theta_2)
52     pC=np.array([thetaGraus_1 ,xC1 ,yC1])
53     posC=np.append(posC ,([pC]),axis=0)
54     #Velocidade do Ponto B
55     xVb= -omega1*11*sin(theta_1)
56     yVb= omega1*11*cos(theta_1)
57     modVB= np.sqrt(xVb**2+yVb**2)
58     velb=np.array([thetaGraus_1 ,xVb ,yVb ,modVB])
59     velB=np.append(velB ,[velb],axis=0)
60     #Velocidade do Ponto C
61     omega2=(omega1*11*13*sin(theta_3-theta_1))/(12*13*sin(theta_2-theta_3))
62     omega3=(omega1*11*12*sin(theta_2-theta_1))/(12*13*sin(theta_2-theta_3))
```

```
62 xVc=xVb-omega2*l2*sin(theta_2)
63 yVc=yVb+omega2*l2*cos(theta_2)
64 modVc=np.sqrt(xVc**2+yVc**2)
65 velc=np.array([thetaGraus_1,xVc,yVc,modVc])
66 velC=np.append(velC,[velc],axis=0)
67 #Aceleração do Ponto B
68 xAb= -omega1**2*l1*cos(theta_1)
69 yAb= -omega1**2*l1*sin(theta_1)
70 modAB=np.sqrt(xAb**2+yAb**2)
71 acelb=np.array([thetaGraus_1,xAb,yAb,modAB])
72 acelB=np.append(acelB,[acelb],axis=0)
73 #Aceleração do Ponto C
74 detA=l2*l3*sin(theta_2-theta_3)
75 b1= omega1**2*l1*cos(theta_1)+omega2**2*l2*cos(theta_2)-omega3**2*l3*cos(
    theta_3)
76 b2= omega1**2*l1*sin(theta_1)+omega2**2*l2*sin(theta_2)-omega3**2*l3*sin(
    theta_3)
77 alpha2=-l3*(b1*cos(theta_3)+b2*sin(theta_3))/detA
78 alpha3=-l2*(b1*cos(theta_2)+b2*sin(theta_2))/detA
79 xAc= xAb -alpha2*l2*sin(theta_2)-omega2**2*l2*cos(theta_2)
80 yAc= yAb +alpha2*l2*cos(theta_2)-omega2**2*l2*sin(theta_2)
81 modAC=np.sqrt(xAc**2+yAc**2)
82 acelc=np.array([thetaGraus_1,xAc,yAc,modAC])
83 acelC=np.append(acelC,[acelc],axis=0)
84
85 #----- Gráficos de Posição -----
86 plt.figure(figsize=(6,6),dpi=300)
87 plot(posB[:,1],posB[:,2],linewidth=1.5, color="black",label='posB')
88 plot(posC[:,1],posC[:,2],linewidth=1.5, color="red",label='posC')
89 ylabel("Y [m]",fontsize=16); xlabel("X [m]",fontsize=16)
90 legend(loc='best', fontsize=14);grid(True); plt.xticks(fontsize=14)
91 plt.yticks(fontsize=14); plt.show()
92
93 plt.figure(figsize=(6,5),dpi=300)
94 plt.subplot(211)
95 plot(posB[:,0],posB[:,1],linewidth=1.5, color="black",label='xB')
96 plot(posB[:,0],posB[:,2],linewidth=1.5, color="blue",label='yB')
97 ylabel("Posição [m]",fontsize=14); legend(loc='best')
98 plt.xticks(np.arange(0,720,step=20),minor=True);xlim(0,720);grid(True)
99 plt.subplot(212)
```

```
100 plot(posC[:,0],posC[:,1],linewidth=1.5, color="black",label='xC')
101 plot(posC[:,0],posC[:,2],linewidth=1.5, color="blue",label='yC')
102 ylabel("Posição [m]",fontsize=14); xlabel("Theta [ $^{\circ}$ ]",fontsize=14)
103 plt.xticks(np.arange(0,720,step=20),minor=True)
104 xlim(0,720); legend(loc='best');grid(True); plt.show()
105 #----- Gráficos de Velocidade -----
106 #Ponto B
107 plt.figure(figsize=(6,5),dpi=300)
108 plt.subplot(211)
109 plot(velB[:,0],velB[:,1],linewidth=1.5, color="black",label='vBx')
110 plot(velB[:,0],velB[:,2],linewidth=1.5, color="blue",label='vBy')
111 ylabel("Velocidade [m/s]",fontsize=14); legend(loc='best')
112 plt.xticks(np.arange(0,720,step=20),minor=True); xlim(0,720); grid(True)
113 plt.subplot(212)
114 plot(velB[:,0],velB[:,3],linewidth=1.5, color="red",label='mod. vB')
115 ylabel("Velocidade [m/s]",fontsize=14); legend(loc='best')
116 xlabel("Theta [ $^{\circ}$ ]",fontsize=14);xlim(0,720); grid(True)
117 plt.xticks(np.arange(0,720,step=20),minor=True); plt.show()
118 #Ponto C
119 plt.figure(figsize=(6,5),dpi=300)
120 plt.subplot(211)
121 plot(velC[:,0],velC[:,1],linewidth=1.5, color="black",label='vCx')
122 plot(velC[:,0],velC[:,2],linewidth=1.5, color="blue",label='vCy')
123 ylabel("Velocidade [m/s]",fontsize=14); legend(loc='best')
124 plt.xticks(np.arange(0,720,step=20),minor=True); xlim(0,720); grid(True)
125 plt.subplot(212)
126 plot(velC[:,0],velC[:,3],linewidth=1.5, color="red",label='mod. vC')
127 ylabel("Velocidade [m/s]",fontsize=14); legend(loc='best')
128 xlabel("Theta [ $^{\circ}$ ]",fontsize=14); xlim(0,720); grid(True)
129 plt.xticks(np.arange(0,720,step=20),minor=True);plt.show()
130 #----- Gráficos de Aceleração -----
131 #Ponto B
132 plt.figure(figsize=(6,5),dpi=300)
133 plt.subplot(211)
134 plot(accelB[:,0],accelB[:,1],linewidth=1.5, color="black",label='aBx')
135 plot(accelB[:,0],accelB[:,2],linewidth=1.5, color="blue",label='aBy')
136 ylabel("Aceleração [m/s2]",fontsize=14); legend(loc='best')
137 plt.xticks(np.arange(0,720,step=20),minor=True);xlim(0,720); grid(True)
138 plt.subplot(212)
139 plot(accelB[:,0],accelB[:,3],linewidth=1.5, color="red",label='mod. aB')
```

```
140 ylabel("Aceleração [m/s^2]", fontsize=14); legend(loc='best')
141 xlabel("Theta [^\circ]", fontsize=14); xlim(0,720); grid(True)
142 plt.xticks(np.arange(0,720,step=20), minor=True); plt.show()
143 #Ponto C
144 plt.figure(figsize=(6,5), dpi=300)
145 plt.subplot(211)
146 plot(accelC[:,0], accelC[:,1], linewidth=1.5, color="black", label='aCx')
147 plot(accelC[:,0], accelC[:,2], linewidth=1.5, color="blue", label='aCy')
148 ylabel("Aceleração [m/s^2]", fontsize=14); legend(loc='best')
149 plt.xticks(np.arange(0,720,step=20), minor=True); xlim(0,720); grid(True)
150 plt.subplot(212)
151 plot(accelC[:,0], accelC[:,3], linewidth=1.5, color="red", label='mod. aC')
152 ylabel("Aceleração [m/s^2]", fontsize=14); legend(loc='best')
153 xlabel("Theta [^\circ]", fontsize=14); xlim(0,720); grid(True)
154 plt.xticks(np.arange(0,720,step=20), minor=True); plt.show()
```

O código também encontra-se disponível no Github.

<https://raw.githubusercontent.com/4barras.py>

2.3.5 Manipulador robótico RP

O manipulador robótico RP possui uma junta rotacional (R) para um movimento angular, e uma junta prismática (P) que permite um movimento linear. Esta é uma das configurações mais simples da classe de manipuladores robóticos e faz parte dos chamados mecanismos de cadeia aberta. Sua representação esquemática é apresentada na figura 2.29.

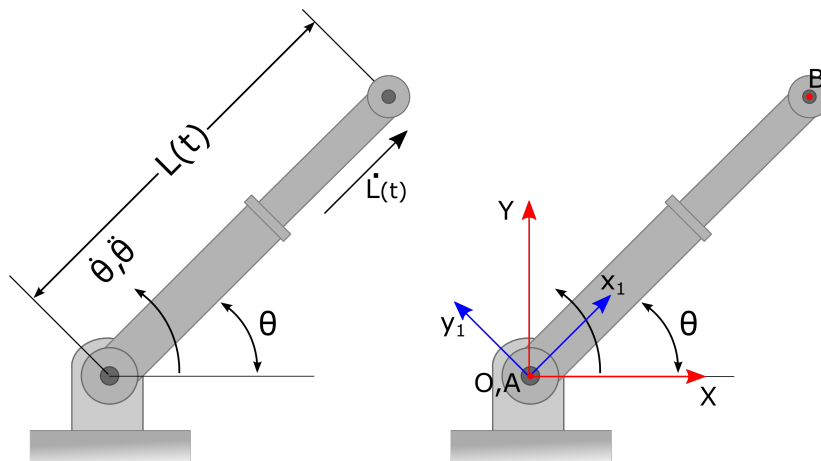


Figura 2.29. Manipulador robótico RP

Neste mecanismo são posicionados um referencial inercial e um referencial móvel de rotação, ambos posicionados em A. A seguir vamos determinar a cinemática da ponta do manipulador,

ou seja, do ponto B.

Posição

O vetor posição ${}^I\vec{r}_{OB}$ é definido com a equação 185.

$$\begin{aligned} {}^I\vec{r}_{OB} &= {}^I\vec{r}_{OA} + {}^I\vec{r}_{AB} \\ {}^I\vec{r}_{OB} &= T_\theta^\top M\vec{r}_{AB} \end{aligned} \quad (185)$$

Resolvendo o único termo da equação 185,

$$T_\theta^\top M\vec{r}_{AB} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(t) \cos(\theta) \\ L(t) \text{sen}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (186)$$

Logo,

$${}^I\vec{r}_{OB} = \begin{bmatrix} L(t) \cos(\theta) \\ L(t) \text{sen}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (187)$$

Exemplo

Considere o manipulador RP da figura 2.29. O braço L possui um comprimento inicial de 400 [mm] e se estende até 700 [mm], limitado a estes valores, $0.4 \leq L(t) \leq 0.7$ [m]. A equação que descreve a extensão do braço é $L = 0.4 + 0.1t$, onde L está em metros e t em segundos. O movimento rotativo também é limitado, onde $0 \leq \theta \leq \pi$ [rad]. A equação que descreve o movimento angular é $\theta = \theta_0 + \frac{2\pi}{16}t$, onde θ está em radianos e t em segundos. Na figura 2.30 é plotada a trajetória que o ponto B faz em um tempo $t=5$ [s]. Na figura 2.31 são plotadas as posições nas componentes x e y, em função do tempo.

Velocidade

O vetor velocidade ${}^I\vec{v}_B$ é definido na equação 188,

$$\begin{aligned} {}^I\vec{v}_B &= {}^I\vec{v}_A + {}^I\vec{\omega} \times {}^I\vec{r}_{AB} + {}^I\vec{v}_{RelAB} \\ {}^I\vec{v}_B &= {}^I\vec{\omega} \times {}^I\vec{r}_{AB} + T_\theta^\top M\vec{v}_{RelAB} \end{aligned} \quad (188)$$

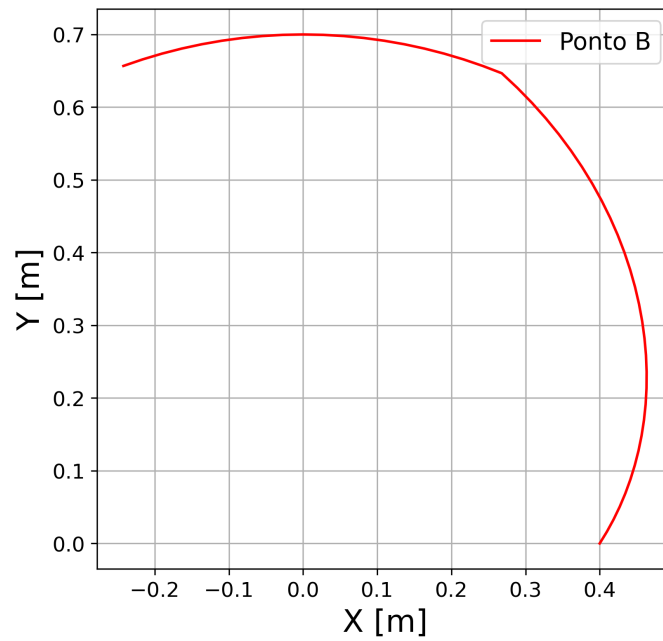


Figura 2.30. Trajetória do ponto B.

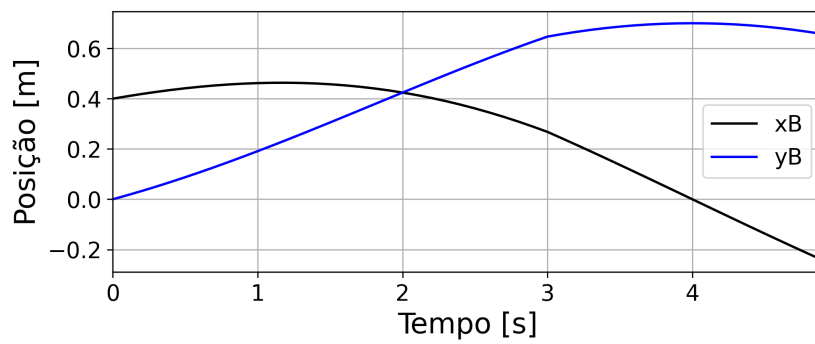


Figura 2.31. Posição do ponto B em função do tempo.

Resolvendo os termos da equação 188,

$${}_I\vec{\omega} \times {}_I\vec{r}_{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ L(t)C(\theta) & L(t)S(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}L(t)\text{sen}(\theta) \\ \dot{\theta}L(t)\text{cos}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (189)$$

$${}_I\vec{v}_{RelAB} = \begin{bmatrix} C(\theta) & -S(\theta) & 0 \\ S(\theta) & C(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{L}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{L}(t)\text{cos}(\theta) \\ \dot{L}(t)\text{sen}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (190)$$

Substituindo as equações 189 e 190 na equação 188,

$${}_I\vec{v}_B = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}L(t) \operatorname{sen}(\theta) \\ \dot{\theta}L(t) \operatorname{cos}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{L}(t) \operatorname{cos}(\theta) \\ \dot{L}(t) \operatorname{sen}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (191)$$

Exemplo

Continuando o exemplo anterior, suponha que a lança telescópica do braço robótico avança a uma velocidade relativa de $\dot{L} = 0.1$ [m/s] e a velocidade angular seja $\dot{\theta} = 2\pi/16$ [rad/s]. Os gráficos de velocidade do ponto B são plotados na figura 2.32.

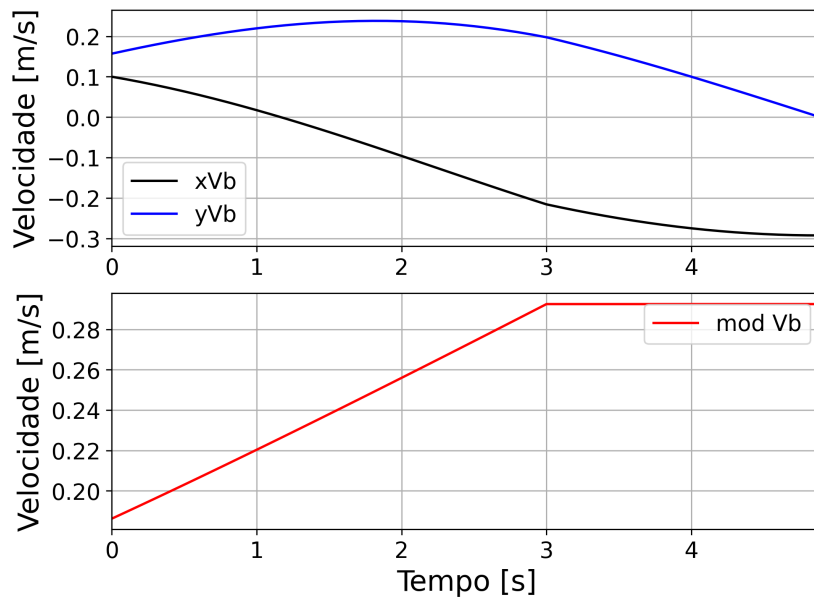


Figura 2.32. Velocidade do ponto B em função do tempo.

Aceleração

O vetor aceleração ${}_I\vec{a}_B$ é definido na equação 192,

$$\begin{aligned} {}_I\vec{a}_B &= {}_I\vec{a}_A + {}_I\vec{\alpha} \times {}_I\vec{r}_{AB} - \dot{\theta}^2 \vec{r}_{AB} + 2 {}_I\vec{\omega} \times {}_I\vec{v}_{Rel} + {}_I\vec{a}_{Rel} \\ {}_I\vec{a}_B &= {}_I\vec{\alpha} \times {}_I\vec{r}_{AB} - \dot{\theta}^2 \vec{r}_{AB} + 2 {}_I\vec{\omega} \times {}_I\vec{v}_{Rel} + T_\theta^\top M\vec{a}_{Rel} \end{aligned} \quad (192)$$

Resolvendo os termos da equação 192,

$${}_I\vec{\alpha} \times_I \vec{r}_{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \ddot{\theta} \\ L(t)C(\theta) & L(t)S(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}L(t)\text{sen}(\theta) \\ \ddot{\theta}L(t)\text{cos}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (193)$$

$$-\dot{\theta}^2 \vec{r}_{AB} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}^2 L(t)\text{cos}(\theta) \\ -\dot{\theta}^2 L(t)\text{sen}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (194)$$

$$2{}_I\vec{\omega} \times_I \vec{v}_{rel} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2\dot{\theta} \\ \dot{L}(t)C(\theta) & \dot{L}(t)S(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -2\dot{\theta}\dot{L}(t)\text{sen}(\theta) \\ 2\dot{\theta}\dot{L}(t)\text{cos}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (195)$$

$${}_I\vec{a}_{Rel} = \begin{bmatrix} C(\theta) & -S(\theta) & 0 \\ S(\theta) & C(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{L}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{L}(t)\text{cos}(\theta) \\ \ddot{L}(t)\text{sen}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (196)$$

Substituindo as equações 193, 194, 195 e 196 na equação 192,

$${}_I\vec{a}_B = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}L(t)\text{sen}(\theta) - \dot{\theta}^2 L(t)\text{cos}(\theta) - 2\dot{\theta}\dot{L}(t)\text{sen}(\theta) + \ddot{L}(t)\text{cos}(\theta) \\ \ddot{\theta}L(t)\text{cos}(\theta) - \dot{\theta}^2 L(t)\text{sen}(\theta) + 2\dot{\theta}\dot{L}(t)\text{cos}(\theta) + \ddot{L}(t)\text{sen}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (197)$$

Exemplo

A aceleração da ponta do manipulador robótico é plotada na figura 2.33. Continuando o exemplo, devido a velocidade relativa \dot{L} e a velocidade angular $\dot{\theta}$ serem ambas constantes, suas derivadas \ddot{L} e $\ddot{\theta}$ são nulas.

Python

Abaixo é apresentado um código em Python utilizado para gerar os gráficos da posição, velocidade e aceleração do manipulador RP, mostrados nas subseções anteriores.

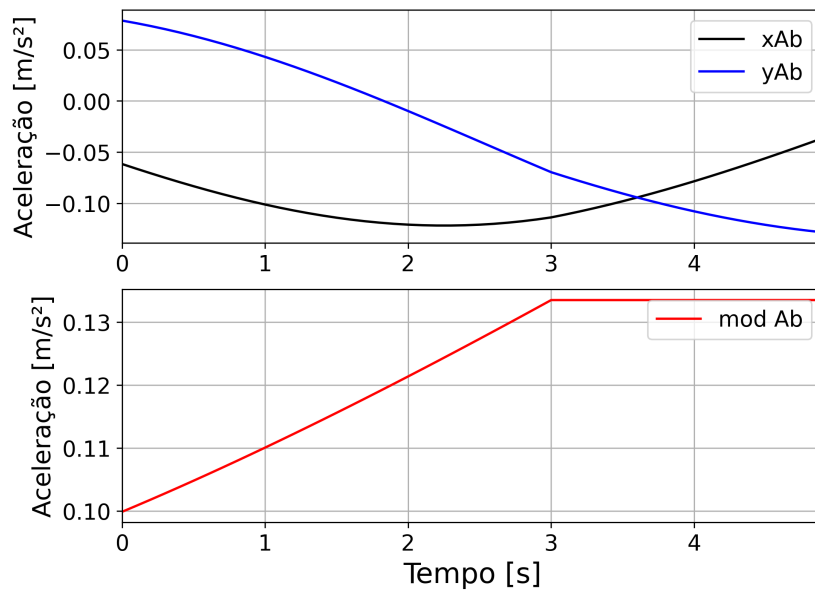


Figura 2.33. Aceleração do ponto B em função do tempo.

```

1  """
2  Instituto Federal do Rio Grande do Sul
3  Programa: Cinemática do Manipulador RP
4  Author: Prof. Dr. Felipe Rodrigues de Freitas Neto
5  Data: 14/11/2023
6  """
7  import numpy as np
8  from numpy import sin, cos, pi
9  import matplotlib.pyplot as plt
10 from matplotlib.pyplot import grid, legend, xlabel, ylabel
11 from matplotlib.pyplot import xlim, xticks, yticks
12
13 t=0 ; tFinal=5 ; dt=0.1 #[s]
14 T=np.arange(t,tFinal,dt)
15 omega= 2*pi/16 #[rad/s]
16 alpha=0 #[rad/s^2]
17 thetaInicial=0 ; theta=thetaInicial + omega*t #[rad]
18 L= 0.4 + 0.1*t #[m]
19 Lp=0.1 #[m/s]
20 Lpp=0 # [m/s^2]
21
22 posB=np.empty((0,3),dtype=float) ; VelB=np.empty((0,4),dtype=float)
23 AcelB=np.empty((0,4),dtype=float)
24
25 for t in T:
    
```

```
26
27 #Posição
28 #Condição para o avanço do braço
29 if(L>=0.7): L=0.7
30 else: L= 0.4 + 0.1*t
31 #Condição para o movimento rotativo
32 if(theta>pi): theta=pi
33 elif(theta<0): theta=0
34 else: theta=thetaInicial + omega*t
35
36 #Ponto B
37 rBx=L*cos(theta) ; rBy=L*sin(theta)
38 posb=np.array([t,rBx,rBy]); posB=np.append(posB,[posb],axis=0)
39 #Velocidade
40 xVb=-omega*L*sin(theta) + Lp*cos(theta)
41 yVb= omega*L*cos(theta) + Lp*sin(theta)
42 modVb=np.sqrt(xVb**2+yVb**2)
43 velB=np.array([t,xVb,yVb,modVb]); VelB=np.append(VelB,[velB],axis=0)
44 #Aceleração
45 xAb= -alpha*L*sin(theta)-omega**2*L*cos(theta)-2*omega*Lp*sin(theta)+Lpp
    *cos(theta)
46 yAb= alpha*L*cos(theta)-omega**2*L*sin(theta)+2*omega*Lp*cos(theta)+Lpp
    *sin(theta)
47 modAb=np.sqrt(xAb**2+yAb**2)
48 acelB=np.array([t,xAb,yAb,modAb])
49 AcelB=np.append(AcelB,[acelB],axis=0)
50
51 #Gráficos
52 #Posição
53 plt.figure(figsize=(6,6),dpi=300)
54 plt.plot(posB[:,1],posB[:,2],label='Ponto B',color="red",linewidth=1.5)
55 grid(True); xlabel('X [m]',fontsize=18);ylabel('Y [m]',fontsize=18)
56 legend(loc='best',fontsize=14);xticks(fontsize=12);yticks(fontsize=12)
57 plt.figure(figsize=(8,3),dpi=300)
58 plt.plot(posB[:,0],posB[:,1],label='xB',color="black",linewidth=1.5)
59 plt.plot(posB[:,0],posB[:,2],label='yB',color="blue",linewidth=1.5)
60 grid(True);xlabel('Tempo [s]',fontsize=18);ylabel('Posição [m]',fontsize=18)
61 xlim(posB[0,0],posB[-1,0]); xticks(fontsize=14); yticks(fontsize=14)
62 legend(loc='best',fontsize=14); plt.show()
63 #Velocidade
```

```
64 plt.figure(figsize=(8,6),dpi=300)
65 plt.subplot(211)
66 plt.plot(VelB[:,0],VelB[:,1],label='xVb',color="black",linewidth=1.5)
67 plt.plot(VelB[:,0],VelB[:,2],label='yVb',color="blue",linewidth=1.5)
68 grid(True);ylabel('Velocidade [m/s]',fontsize=18);yticks(fontsize=14)
69 xlim(posB[0,0],posB[-1,0]);xticks(fontsize=14);legend(loc='best',fontsize
    =14)
70 plt.subplot(212)
71 plt.plot(VelB[:,0],VelB[:,3],label='mod Vb',color="red",linewidth=1.5)
72 grid(True);xlabel('Tempo [s]',fontsize=18);ylabel('Velocidade [m/s]',
    fontsize=18)
73 xlim(VelB[0,0],VelB[-1,0]);xticks(fontsize=14);yticks(fontsize=14)
74 legend(loc='best',fontsize=14);plt.show()
75 #Aceleração
76 plt.figure(figsize=(8,6),dpi=300)
77 plt.subplot(211)
78 plt.plot(AcelB[:,0],AcelB[:,1],label='xAb',color="black",linewidth=1.5)
79 plt.plot(AcelB[:,0],AcelB[:,2],label='yAb',color="blue",linewidth=1.5)
80 grid(True);ylabel('Aceleração [m/s^2]',fontsize=16);yticks(fontsize=14)
81 xlim(AcelB[0,0],AcelB[-1,0]);xticks(fontsize=14);legend(loc='best',fontsize
    =14)
82 plt.subplot(212)
83 plt.plot(AcelB[:,0],AcelB[:,3],label='mod Ab',color="red",linewidth=1.5)
84 grid(True);xlabel('Tempo [s]',fontsize=18);ylabel('Aceleração [m/s^2]',
    fontsize=16)
85 xlim(AcelB[0,0],AcelB[-1,0]);xticks(fontsize=14);yticks(fontsize=14)
86 legend(loc='best',fontsize=14);plt.show()
```

O código também encontra-se disponível no Github.

<https://raw.githubusercontent.com/ManipuladorRP.py>

2.3.6 Manipulador robótico RRR (2D)

É apresentado na figura 2.34 um manipulador robótico com três juntas de rotação (RRR), no plano. No centro de cada articulação foi adicionado um referencial móvel de rotação e suas origens nomeadas como A , B e C , respectivamente para os referenciais móveis $M1$, $M2$ e $M3$. O ponto de interesse é o ponto D , neste ponto se localiza a placa onde o elemento final de atuação pode ser acoplado. O ângulo de rotação de cada referencial é medido a partir do referencial imediatamente anterior. Por exemplo, o ângulo θ_1 do referencial móvel $M1$ é medido

com relação ao referencial Inercial, já o ângulo θ_2 do referencial móvel M2 é medido com relação ao referencial M1, e o mesmo acontece com o θ_3 no referencial móvel M3.

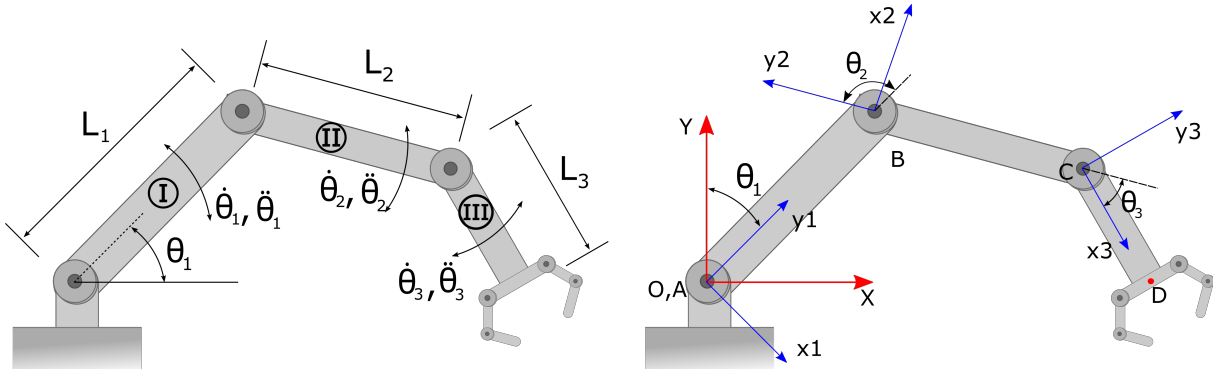


Figura 2.34. Manipulador robótico RRR no plano. Fonte: Autor.

Abaixo são escritas as matrizes de transformada de coordenadas para cada rotação dos referenciais móveis.

$$T_{\theta_1}^\top = \begin{bmatrix} C(\theta_1) & -S(\theta_1) & 0 \\ S(\theta_1) & C(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad T_{\theta_2}^\top = \begin{bmatrix} C(\theta_2) & -S(\theta_2) & 0 \\ S(\theta_2) & C(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad T_{\theta_3}^\top = \begin{bmatrix} C(\theta_3) & -S(\theta_3) & 0 \\ S(\theta_3) & C(\theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (198)$$

Neste exemplo temos sucessivas rotações nas articulações do mecanismo, e como vimos na seção 2.2.3 o efeito dessas rotações são sentidas pelos referenciais (ou elos) posteriores na cadeia cinemática.

As velocidades angulares e as acelerações angulares são definidas pelas equações 199 e 200, respectivamente.

$${}_I\vec{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}; \quad {}_I\vec{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}; \quad {}_I\vec{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (199)$$

$${}_I\vec{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}; \quad {}_I\vec{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}; \quad {}_I\vec{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (200)$$

Devido as sucessivas rotações, devemos calcular as multiplicações matriciais que ocorrem entre as matrizes de transformada de coordenadas. O resultado é utilizado posteriormente nas equações cinemáticas.

$$\begin{aligned}
 T_{\theta_1}^\top \cdot T_{\theta_2}^\top &= \begin{bmatrix} C(\theta_1) & -S(\theta_1) & 0 \\ S(\theta_1) & C(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C(\theta_2) & -S(\theta_2) & 0 \\ S(\theta_2) & C(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 T_{\theta_1}^\top \cdot T_{\theta_2}^\top &= \begin{bmatrix} C(\theta_1 + \theta_2) & -S(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ S(\theta_1 + \theta_2) & C(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{201}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{\theta_1}^\top \cdot T_{\theta_2}^\top \cdot T_{\theta_3}^\top &= \begin{bmatrix} C(\theta_1) & -S(\theta_1) & 0 \\ S(\theta_1) & C(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C(\theta_2) & -S(\theta_2) & 0 \\ S(\theta_2) & C(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C(\theta_3) & -S(\theta_3) & 0 \\ S(\theta_3) & C(\theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 T_{\theta_1}^\top \cdot T_{\theta_2}^\top \cdot T_{\theta_3}^\top &= \begin{bmatrix} C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{202}
 \end{aligned}$$

A seguir são calculadas a posição, a velocidade e a aceleração dos pontos B, C e D.

Posição

Antes de iniciarmos a desenvolver as equações da posição no referencial Inercial, devemos escrever (ou representar) os elos nos referenciais mais convenientes, ou seja, nos seus respectivos referenciais móveis.

$${}_{M1}\vec{r}_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ L_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}_{M2}\vec{r}_{BC} = \begin{bmatrix} 0 \\ -L_2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}_{M3}\vec{r}_{CD} = \begin{bmatrix} L_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{203}$$

Os vetores posição ${}_I\vec{r}_{OB}$, ${}_I\vec{r}_{OC}$ e ${}_I\vec{r}_{OD}$ são definidos abaixo,

$$\begin{aligned}
 {}^I\vec{r}_{OB} &= \overset{0}{\cancel{{}^I\vec{r}_{OA}}} + {}^I\vec{r}_{AB} \\
 {}^I\vec{r}_{OC} &= \overset{0}{\cancel{{}^I\vec{r}_{OA}}} + {}^I\vec{r}_{AB} + {}^I\vec{r}_{BC} \\
 {}^I\vec{r}_{OD} &= \overset{0}{\cancel{{}^I\vec{r}_{OA}}} + {}^I\vec{r}_{AB} + {}^I\vec{r}_{BC} + {}^I\vec{r}_{CD}
 \end{aligned} \tag{204}$$

Como descrito na seção 2.2.3, a rotação da barra \overline{BC} em relação ao referencial inercial, traz consigo a rotação do elemento \overline{AB} . O mesmo acontece para o elemento \overline{CD} , ele leve consigo as rotações dos elementos \overline{AB} e \overline{BC} . Desse modo, esta informação adicional deve estar contida na matriz de transformada de coordenadas, como demonstrado com as equações 201 e 202. A equação 204 é expandida a seguir,

$$\begin{aligned}
 {}^I\vec{r}_{OB} &= T_{\theta_1}^\top \cdot M_1 \vec{r}_{AB} \\
 {}^I\vec{r}_{OC} &= T_{\theta_1}^\top \cdot M_1 \vec{r}_{AB} + T_{\theta_1}^\top T_{\theta_2}^\top \cdot M_2 \vec{r}_{BC} \\
 {}^I\vec{r}_{OD} &= T_{\theta_1}^\top \cdot M_1 \vec{r}_{AB} + T_{\theta_1}^\top T_{\theta_2}^\top \cdot M_2 \vec{r}_{BC} + T_{\theta_1}^\top T_{\theta_2}^\top T_{\theta_3}^\top \cdot M_3 \vec{r}_{CD}
 \end{aligned} \tag{205}$$

A posição do ponto B é dada por,

$${}^I\vec{r}_{OB} = \begin{bmatrix} rBx \\ rBy \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\text{sen}(\theta_1) & 0 \\ \text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ L_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 \text{sen}(\theta_1) \\ L_1 \cdot \cos(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{206}$$

O que resulta na equação 207,

$$\begin{aligned}
 rBx &= -L_1 \text{sen}(\theta_1) \\
 rBy &= L_1 \cdot \cos(\theta_1)
 \end{aligned} \tag{207}$$

A posição do ponto C é definida a seguir,

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{r}_{OC} &= \begin{bmatrix} rCx \\ rCy \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 \text{sen}(\theta_1) \\ L_1 \cdot \text{cos}(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C(\theta_1 + \theta_2) & -S(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ S(\theta_1 + \theta_2) & C(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -L_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} rCx \\ rCy \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -L_1 \text{sen}(\theta_1) \\ L_1 \cdot \text{cos}(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \\ -L_2 \text{cos}(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{208}$$

O que resulta na equação 209,

$$\begin{aligned}
 rCx &= -L_1 \text{sen}(\theta_1) + L_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \\
 rCy &= L_1 \cdot \text{cos}(\theta_1) - L_2 \text{cos}(\theta_1 + \theta_2)
 \end{aligned} \tag{209}$$

Finalmente, a posição do ponto D é dada por,

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{r}_{OD} &= \begin{bmatrix} rDx \\ rDy \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 S(\theta_1) + L_2 S(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 C(\theta_1) - L_2 C(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} rDx \\ rDy \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -L_1 S(\theta_1) + L_2 S(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 C(\theta_1) - L_2 C(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_3 C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ L_3 S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{210}$$

O que resulta na equação 211,

$$\begin{aligned}
 rDx &= -L_1 \text{sen}(\theta_1) + L_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) + L_3 \text{cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
 rDy &= L_1 \cdot \text{cos}(\theta_1) - L_2 \text{cos}(\theta_1 + \theta_2) + L_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)
 \end{aligned} \tag{211}$$

Exemplo

Considere o manipulador apresentado na figura 2.34. Os comprimentos dos elementos I, II e III são 0.5, 0.3 e 0.1 [m], respectivamente. Os ângulos iniciais são $\theta_{1i} = 0^\circ$, $\theta_{2i} = 0^\circ$ e $\theta_{3i} = 90^\circ$,

e os ângulos finais são $\theta_{1f} = -45^\circ$, $\theta_{2f} = 90^\circ$ e $\theta_{3f} = -90^\circ$. São apresentadas na figura 2.35 as trajetórias formadas pelos pontos A, B e C no plano XY . Foi adotado um movimento sequencial, primeiro somente o ângulo θ_1 é acionado, posteriormente ocorre o movimento do θ_2 seguido do θ_3 .

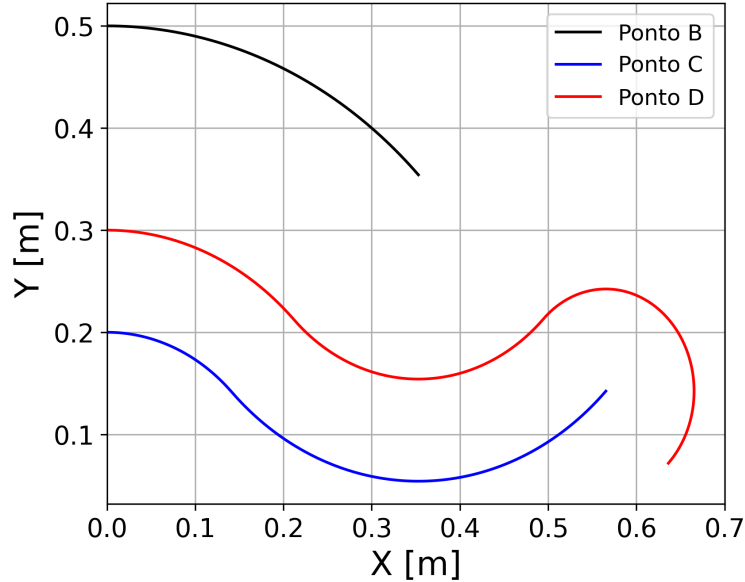


Figura 2.35. Trajetória dos pontos B, C e D.

Velocidade

Depois de obtidas as posições dos pontos B, C e D, vamos desenvolver equações que nos permitam calcular as velocidades desses mesmos pontos no manipulador robótico apresentado. Os vetores velocidade ${}^I\vec{v}_B$, ${}^I\vec{v}_C$ e ${}^I\vec{v}_D$ são desenvolvidos a seguir,

$$\begin{aligned}
 {}^I\vec{v}_B &= {}^I\vec{v}_A + {}^I\vec{\omega}_1 \times {}^I\vec{r}_{AB} + {}^I\vec{v}_{relAB} \\
 {}^I\vec{v}_C &= {}^I\vec{v}_B + {}^I\vec{\omega}_2 \times {}^I\vec{r}_{BC} + {}^I\vec{v}_{relBC} \\
 {}^I\vec{v}_D &= {}^I\vec{v}_C + {}^I\vec{\omega}_3 \times {}^I\vec{r}_{CD} + {}^I\vec{v}_{relCD}
 \end{aligned} \tag{212}$$

Os vetores ${}^I\vec{v}_{relAB}$, ${}^I\vec{v}_{relBC}$ e ${}^I\vec{v}_{relCD}$ são nulos pois não há variação da magnitude dos vetores ${}^M_1\vec{r}_{AB}$, ${}^M_2\vec{r}_{BC}$ e ${}^M_3\vec{r}_{CD}$.

O que resulta nas equações abaixo,

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{v}_B &= {}_I\vec{\omega}_1 \times {}_I\vec{r}_{AB} \\
 {}_I\vec{v}_C &= {}_I\vec{v}_B + {}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC} \\
 {}_I\vec{v}_D &= {}_I\vec{v}_C + {}_I\vec{\omega}_3 \times {}_I\vec{r}_{CD}
 \end{aligned} \tag{213}$$

As velocidades angulares ${}_I\vec{\omega}_1$, ${}_I\vec{\omega}_2$ e ${}_I\vec{\omega}_3$ foram definidas na equação 199 e os vetores de posição também já foram calculados. Agora basta resolvermos cada termo da equação 213.

Para o ponto B, temos

$${}_I\vec{\omega}_1 \times {}_I\vec{r}_{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \\ -L_1 S(\theta_1) & L_1 C(\theta_1) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 L_1 C(\theta_1) \\ -\dot{\theta}_1 L_1 S(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{214}$$

$${}_I\vec{v}_B = \begin{bmatrix} vBx \\ vBy \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 L_1 C(\theta_1) \\ -\dot{\theta}_1 L_1 S(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{215}$$

Para o ponto C,

$${}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ L_2 S(\theta_1 + \theta_2) & -L_2 C(\theta_1 + \theta_2) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) L_2 C(\theta_1 + \theta_2) \\ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) L_2 S(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{216}$$

$${}_I\vec{v}_C = \begin{bmatrix} vCx \\ vCy \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 L_1 C(\theta_1) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) L_2 C(\theta_1 + \theta_2) \\ -\dot{\theta}_1 L_1 S(\theta_1) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) L_2 S(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{217}$$

Para o ponto D,

$${}_I\vec{\omega}_3 \times {}_I\vec{r}_{CD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & (\sum_{i=1}^3 \dot{\theta}_i) \\ L_2 S(\sum_{i=1}^3 \theta_i) & -L_2 C(\sum_{i=1}^3 \theta_i) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) L_2 C(\sum_{i=1}^3 \theta_i) \\ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) L_2 S(\sum_{i=1}^3 \theta_i) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{218}$$

$${}_I\vec{v}_D = \begin{bmatrix} vDx \\ vDy \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 L_1 C(\theta_1) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) L_2 C(\theta_1 + \theta_2) - (\sum_{i=1}^3 \dot{\theta}_i) L_3 S(\sum_{i=1}^3 \theta_i) \\ -\dot{\theta}_1 L_1 S(\theta_1) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) L_2 S(\theta_1 + \theta_2) + (\sum_{i=1}^3 \dot{\theta}_i) L_3 C(\sum_{i=1}^3 \theta_i) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (219)$$

Exemplo

Considere o manipulador apresentado na figura 2.34 e os dados do exemplo utilizado para obter a posição dos pontos B, C e D. Considerando velocidades angulares constantes $\dot{\theta}_1 = 5.0[\text{rad/s}]$, $\dot{\theta}_2 = 10.0[\text{rad/s}]$ e $\dot{\theta}_3 = 25.0[\text{rad/s}]$, as velocidades absolutas dos pontos B, C e D foram computadas e são apresentadas na figura 2.36.

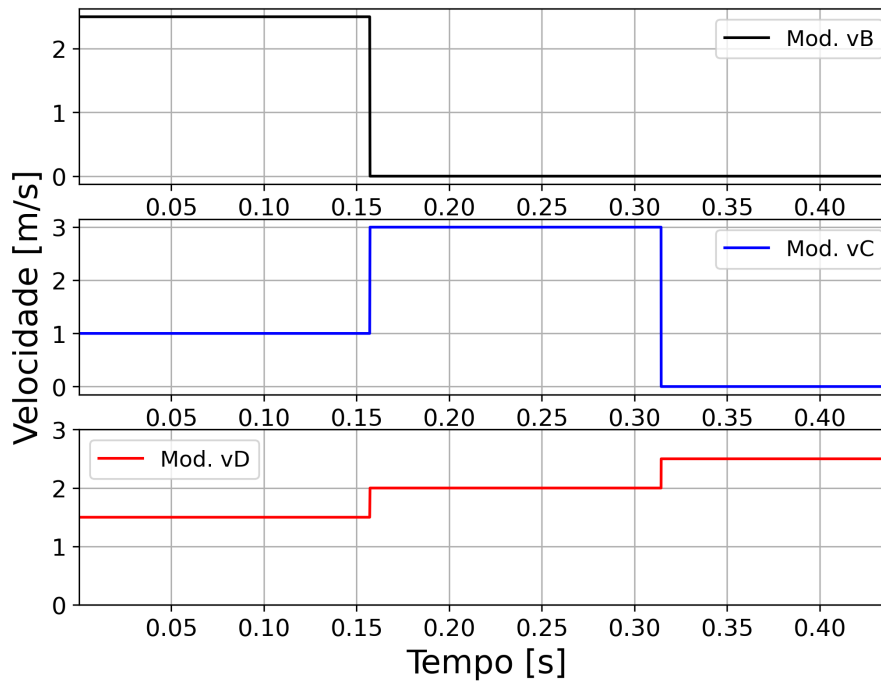


Figura 2.36. Velocidade dos pontos B, C e D.

Aceleração

Os vetores de aceleração ${}_I\vec{a}_B$, ${}_I\vec{a}_C$ e ${}_I\vec{a}_D$ são desenvolvidos como se segue,

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{a}_B &= \cancel{{}_I\vec{a}_A}^0 + {}_I\vec{\alpha}_1 \times {}_I\vec{r}_{AB} + {}_I\vec{\omega}_1 \times ({}_I\vec{\omega}_1 \times {}_I\vec{r}_{AB}) + 2 {}_I\vec{\omega}_1 \times \cancel{{}_I\vec{v}_{relAB}}^0 + \cancel{{}_I\vec{a}_{relAB}}^0 \\
 {}_I\vec{a}_C &= {}_I\vec{a}_B + {}_I\vec{\alpha}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC} + {}_I\vec{\omega}_2 \times ({}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC}) + 2 {}_I\vec{\omega}_2 \times \cancel{{}_I\vec{v}_{relBC}}^0 + \cancel{{}_I\vec{a}_{relBC}}^0 \\
 {}_I\vec{a}_D &= {}_I\vec{a}_C + {}_I\vec{\alpha}_3 \times {}_I\vec{r}_{CD} + {}_I\vec{\omega}_3 \times ({}_I\vec{\omega}_3 \times {}_I\vec{r}_{CD}) + 2 {}_I\vec{\omega}_3 \times \cancel{{}_I\vec{v}_{relCD}}^0 + \cancel{{}_I\vec{a}_{relCD}}^0
 \end{aligned} \tag{220}$$

Devido os vetores ${}_I\vec{v}_{relAB}$, ${}_I\vec{v}_{relBC}$ e ${}_I\vec{v}_{relCD}$ serem nulos, as acelerações de Coriolis e acelerações relativas dos elementos I, II e III também são nulas.

O que resulta nas equações abaixo,

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{a}_B &= {}_I\vec{\alpha}_1 \times {}_I\vec{r}_{AB} + {}_I\vec{\omega}_1 \times ({}_I\vec{\omega}_1 \times {}_I\vec{r}_{AB}) \\
 {}_I\vec{a}_C &= {}_I\vec{a}_B + {}_I\vec{\alpha}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC} + {}_I\vec{\omega}_2 \times ({}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC}) \\
 {}_I\vec{a}_D &= {}_I\vec{a}_C + {}_I\vec{\alpha}_3 \times {}_I\vec{r}_{CD} + {}_I\vec{\omega}_3 \times ({}_I\vec{\omega}_3 \times {}_I\vec{r}_{CD})
 \end{aligned} \tag{221}$$

As acelerações angulares ${}_I\vec{\alpha}_1$, ${}_I\vec{\alpha}_2$ e ${}_I\vec{\alpha}_3$ foram definidas na equação 200 e os vetores de posição também já foram calculados, assim como os vetores velocidade. Agora basta resolvermos cada termo da equação 221.

Para o ponto B, temos

$${}_I\vec{\alpha}_1 \times {}_I\vec{r}_{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \ddot{\theta}_1 \\ -L_1 S(\theta_1) & L_1 C(\theta_1) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 L_1 C(\theta_1) \\ -\ddot{\theta}_1 L_1 S(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{222}$$

$${}_I\vec{\omega}_1 \times ({}_I\vec{\omega}_1 \times {}_I\vec{r}_{AB}) = -(\dot{\theta}_1)^2 {}_I\vec{r}_{AB} = \begin{bmatrix} +\dot{\theta}_1^2 L_1 S(\theta_1) \\ -\dot{\theta}_1^2 L_1 C(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{223}$$

$${}_I\vec{a}_B = \begin{bmatrix} aBx \\ aBy \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 L_1 C(\theta_1) + \dot{\theta}_1^2 L_1 S(\theta_1) \\ -\ddot{\theta}_1 L_1 S(\theta_1) - \dot{\theta}_1^2 L_1 C(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{224}$$

Para o ponto C,

$${}_I\vec{\alpha}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ L_2 S(\theta_1 + \theta_2) & -L_2 C(\theta_1 + \theta_2) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) L_2 C(\theta_1 + \theta_2) \\ (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) L_2 S(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (225)$$

$${}_I\vec{\omega}_2 \times ({}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{BC}) = -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 {}_I\vec{r}_{BC} = \begin{bmatrix} -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 L_2 S(\theta_1 + \theta_2) \\ +(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 L_2 C(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (226)$$

$$\begin{bmatrix} aCx \\ aCy \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aBx \\ aBy \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) L_2 C(\theta_1 + \theta_2) - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 L_2 S(\theta_1 + \theta_2) \\ (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) L_2 S(\theta_1 + \theta_2) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 L_2 C(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (227)$$

Com a equação 227 podemos computar a aceleração absoluta do ponto C.

E finalmente para o ponto D,

$${}_I\vec{\alpha}_3 \times {}_I\vec{r}_{CD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & (\sum_{i=1}^3 \ddot{\theta}_i) \\ L_3 C(\sum_{i=1}^3 \theta_i) & L_3 S(\sum_{i=1}^3 \theta_i) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -(\sum_{i=1}^3 \ddot{\theta}_i) L_3 S(\sum_{i=1}^3 \theta_i) \\ (\sum_{i=1}^3 \ddot{\theta}_i) L_3 C(\sum_{i=1}^3 \theta_i) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (228)$$

$${}_I\vec{\omega}_3 \times ({}_I\vec{\omega}_3 \times {}_I\vec{r}_{CD}) = -\left(\sum_{i=1}^3 \dot{\theta}_i\right)^2 {}_I\vec{r}_{CD} = \begin{bmatrix} -\left(\sum_{i=1}^3 \dot{\theta}_i\right)^2 L_3 C(\sum_{i=1}^3 \theta_i) \\ -\left(\sum_{i=1}^3 \dot{\theta}_i\right)^2 L_3 S(\sum_{i=1}^3 \theta_i) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (229)$$

$$\begin{bmatrix} aDx \\ aDy \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aCx \\ aCy \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(\sum_{i=1}^3 \ddot{\theta}_i) L_3 S(\sum_{i=1}^3 \theta_i) - \left(\sum_{i=1}^3 \dot{\theta}_i\right)^2 L_3 C(\sum_{i=1}^3 \theta_i) \\ (\sum_{i=1}^3 \ddot{\theta}_i) L_3 C(\sum_{i=1}^3 \theta_i) - \left(\sum_{i=1}^3 \dot{\theta}_i\right)^2 L_3 S(\sum_{i=1}^3 \theta_i) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (230)$$

Com a equação 230 é possível calcular a aceleração absoluta do ponto D.

Exemplo

Considere o manipulador apresentado na figura 2.34 e os dados do exemplo utilizado para obter a posição e a velocidade dos pontos B, C e D. Considerando acelerações angulares iguais a: $\ddot{\theta}_1 = 0[\text{rad}/\text{s}^2]$, $\ddot{\theta}_2 = 0[\text{rad}/\text{s}^2]$ e $\ddot{\theta}_3 = 0[\text{rad}/\text{s}^2]$, as acelerações absolutas dos pontos B, C e D foram computadas e são apresentadas na figura 2.37.

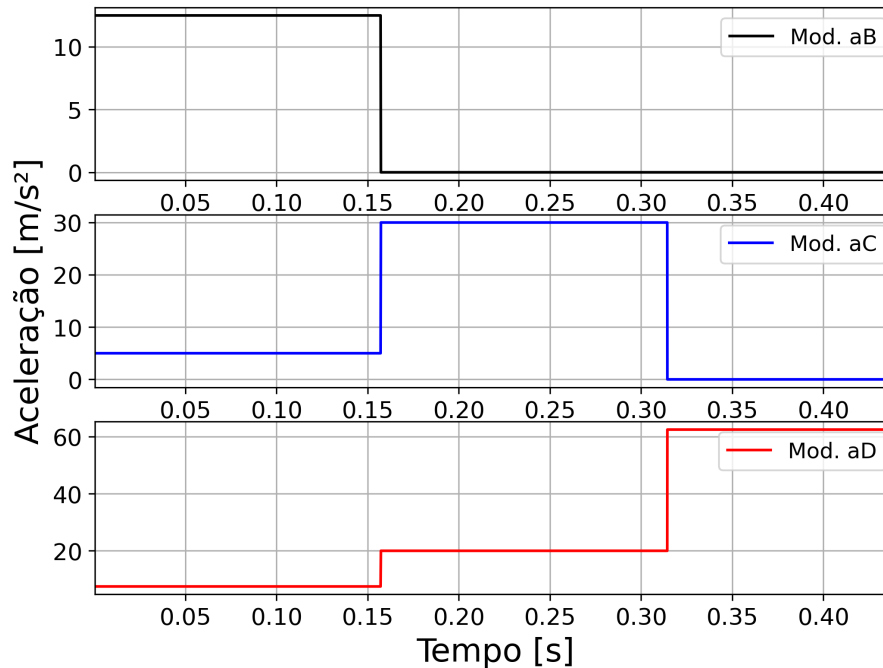


Figura 2.37. Acelerações dos pontos B, C e D.

Python

A seguir é apresentado um código em Python utilizado para gerar os gráficos da posição, velocidade e aceleração do mecanismo articulado RRR no plano.

```
1  """
2  Instituto Federal do Rio Grande do Sul
3  Programa: Cinemática do Manipulador Robótico RRR no plano
4  Author: Prof. Dr. Felipe Rodrigues de Freitas Neto
5  Data: 14/09/2023
6  """
7  import numpy as np
8  from numpy import sin, pi, cos, sqrt
9  import matplotlib.pyplot as plt
10
11 #Parametros
```

```
12 l1, l2, l3= 0.5, 0.3, 0.1 #[m]
13 thetap_1,thetap_2,thetap_3=5.,10.,25. #rad/s
14 thetapp_1, thetapp_2, thetapp_3 = 0.0, 0.0, 0.0 #rad/s^2
15 tempo=0 ; Tempo=[]
16
17 dTheta1=0.10*pi/180
18 #Theta 1
19 theta1Grad_i=0 #angulo inicial do theta 1 [graus]
20 theta1Grad_f= -45 #angulo final do theta 1 [graus]
21 theta1_i= pi*theta1Grad_i/180 #angulo final do theta 1 [rad]
22 theta1_f= pi*theta1Grad_f/180 #angulo final do theta 1 [rad]
23 if (theta1Grad_f<0):
24     dTheta1=-dTheta1
25     thetap_1=-thetap_1
26 Theta1=np.arange(theta1_i,theta1_f,dTheta1)
27 TempoTotal_1=np.abs((theta1_f-theta1_i)/thetap_1)
28 dtempo1=np.abs(dTheta1/thetap_1)
29
30 #Theta 2
31 dTheta2=0.101*pi/180
32 theta2Grad_i=0 #angulo inicial do theta 2 [graus]
33 theta2Grad_f= 90 #angulo final do theta 2 [graus]
34 theta2_i= pi*theta2Grad_i/180
35 theta2_f= pi*theta2Grad_f/180 #angulo final do theta 2 [rad]
36 if (theta2Grad_f<0):
37     dTheta2=-dTheta2
38     thetap_2=-thetap_2
39 Theta2=np.arange(theta2_i,theta2_f,dTheta2)
40 TempoTotal_2=np.abs((theta2_f-theta2_i)/thetap_2)
41 dtempo2=np.abs(dTheta2/thetap_2)
42
43 #Theta 3
44 dTheta3=0.101*pi/180
45 theta3Grad_i= 90 #angulo inicial do theta 3 [graus]
46 theta3Grad_f= -90 #angulo final do theta 3 [graus]
47 theta3_i= pi*theta3Grad_i/180 #angulo inicial do theta 3 [rad]
48 theta3_f= pi*theta3Grad_f/180 #angulo final do theta 3 [rad]
49 if (theta3Grad_f<theta3Grad_i):
50     dTheta3=-dTheta3
51     thetap_3=-thetap_3
```

```
52 Theta3=np.arange(theta3_i,theta3_f,dTheta3)
53 TempoTotal_3=np.abs((theta3_f-theta3_i)/thetap_3)
54 dtempo3=np.abs(dTheta3/thetap_3)
55
56 posB=np.empty((0,3),dtype=float) ; posC=np.empty((0,3),dtype=float)
57 posD=np.empty((0,3),dtype=float)
58 velB=np.empty((0,4),dtype=float) ; velC=np.empty((0,4),dtype=float)
59 velD=np.empty((0,4),dtype=float)
60 acelB=np.empty((0,4),dtype=float) ; acelC=np.empty((0,4),dtype=float)
61 acelD=np.empty((0,4),dtype=float)
62
63 ## Funções das Posições
64 def posicaoB(theta1,tempo):
65     rBx= - l1*sin(theta1)
66     rBy= l1*cos(theta1)
67     R_ob=np.array([tempo,rBx,rBy])
68     return R_ob
69 def posicaoC(theta1,theta2,rBx,rBy):
70     rCx= rBx + l2*sin(theta1+theta2)
71     rCy= rBy -l2*cos(theta1+theta2)
72     R_oc=np.array([theta1_grad,rCx,rCy]) #depois theta1 trocar por tempo
73     return R_oc
74 def posicaoD(theta1,theta2,theta3,rCx,rCy):
75     rDx= rCx+l3*cos(theta1+theta2+theta3)
76     rDy= rCy+l3*sin(theta1+theta2+theta3)
77     R_od=np.array([theta1_grad,rDx,rDy]) #depois theta1 trocar por tempo
78     return R_od
79
80 ## Funções das Velocidades
81 def velocidadeB(mov,tempo,theta1,thetap_1):
82     if (mov==1):
83         thetap_1=thetap_1
84     else:
85         thetap_1=0
86     vBx= -thetap_1*l1*cos(theta1)
87     vBy= -thetap_1*l1*sin(theta1)
88
89     modVel_B=np.sqrt(vBx**2+vBy**2)
90     vB=np.array([tempo,vBx,vBy,modVel_B])
91     return vB
```



```
92 def velocidadeC(mov, tempo, theta1, theta2, thetap_1, thetap_2, vBx, vBy) :
93     if(mov==1):
94         thetap_1=thetap_1; thetap_2=0
95     elif(mov==2):
96         thetap_1=0; thetap_2=thetap_2
97     elif(mov==3) :
98         thetap_1=0; thetap_2=0
99     vCx=vBx + (thetap_1+thetap_2)*l2*cos(theta1+theta2)
100    vCy=vBy + (thetap_1+thetap_2)*l2*sin(theta1+theta2)
101    modVel_C=sqrt(vCx**2+vCy**2)
102    vC=np.array([tempo, vCx, vCy, modVel_C])
103    return vC
104 def velocidadeD(mov, tempo, theta1, theta2, theta3, thetap_1, thetap_2, thetap_3,
    vCx, vCy) :
105     if(mov==1):
106         thetap_1=thetap_1; thetap_2=0; thetap_3=0
107     elif(mov==2):
108         thetap_1=0; thetap_2=thetap_2; thetap_3=0
109     elif(mov==3) :
110         thetap_1=0; thetap_2=0; thetap_3=thetap_3
111     vDx= vCx - (thetap_1+thetap_2+thetap_3)*l3*sin(theta1+theta2+theta3)
112     vDy= vCy + (thetap_1+thetap_2+thetap_3)*l3*cos(theta1+theta2+theta3)
113     modVel_D=sqrt(vDx**2+vDy**2)
114     vD=np.array([tempo, vDx, vDy, modVel_D])
115     return vD
116
117 def aceleracaoB(mov, tempo, theta1, thetap_1, thetapp_1):
118     if (mov==1):
119         thetap_1=thetap_1
120         thetapp_1=thetapp_1
121     else:
122         thetap_1=0
123         thetapp_1=0
124     aBx=-thetapp_1*l1*cos(theta1)+(thetap_1)**2*l1*sin(theta1)
125     aBy=-thetapp_1*l1*sin(theta1)-(thetap_1)**2*l1*cos(theta1)
126     modAcel_B=sqrt(aBx**2+aBy**2)
127     aB=np.array([tempo, aBx, aBy, modAcel_B])
128     return aB
129
130 def aceleracaoC(mov, tempo, theta1, theta2, thetap_1, thetap_2, thetapp_1,
```

```
thetapp_2 ,
    aBx , aBy ) :
131
132     if(mov==1) :
133         thetap_1=thetap_1; thetap_2=0
134         thetapp_1=thetapp_1 ; thetapp_2=0
135     elif(mov==2) :
136         thetap_1=0; thetap_2=thetap_2
137         thetapp_1=0 ; thetapp_2=thetapp_2
138     elif(mov==3) :
139         thetap_1=0; thetap_2=0
140         thetapp_1=0 ; thetapp_2=0
141     aCx=aBx+(thetapp_1+thetapp_2)*l2*cos(theta1+theta2)-(thetap_1+thetap_2)
        **2*l2*sin(theta1+theta2)
142     aCy=aBy+(thetapp_1+thetapp_2)*l2*sin(theta1+theta2)+(thetap_1+thetap_2)
        **2*l2*cos(theta1+theta2)
143     modAcel_C=sqrt(aCx**2+aCy**2)
144     aC=np.array([tempo , aCx , aCy , modAcel_C])
145     return aC
146 def aceleracaoD(mov,tempo ,theta1 ,theta2 ,theta3 ,thetap_1 ,thetap_2 ,thetap_3 ,
    thetapp_1 ,
147         thetapp_2 ,thetapp_3 , aCx ,aCy) :
148     if(mov==1) :
149         thetap_1=thetap_1; thetap_2=0; thetap_3=0
150         thetapp_1=thetapp_1 ; thetapp_2=0 ; thetapp_3=0
151     elif(mov==2) :
152         thetap_1=0; thetap_2=thetap_2 ; thetap_3=0
153         thetapp_1=0 ; thetapp_2=thetapp_2 ; thetapp_3=0
154     elif(mov==3) :
155         thetap_1=0; thetap_2=0 ; thetap_3=thetap_3
156         thetapp_1=0 ; thetapp_2=0 ; thetapp_3=thetapp_3
157     Stheta=theta1+theta2+theta3
158     Sthetap=thetap_1+thetap_2+thetap_3
159     Sthetapp=thetapp_1+thetapp_2+thetapp_3
160     aDx=aCx -Sthetapp*l3*sin(Stheta) -(Sthetap)**2*l3*cos(Stheta)
161     aDy=aCy +Sthetapp*l3*cos(Stheta) -(Sthetap)**2*l3*sin(Stheta)
162     modAcel_D=sqrt(aDx**2+aDy**2)
163     aD=np.array([tempo , aDx , aDy , modAcel_D])
164     return aD
165
166 ##### Theta 1 #####
```

```
167 for theta1 in Theta1:
168     mov=1
169     theta1_grad=(theta1*180/pi)
170     tempo=tempo+dtempo1
171     Tempo.append(tempo)
172     theta2=theta2_i;   theta3=theta3_i
173     # ----- POSIÇÃO -----
174     # Point B
175     R_ob=posicaoB(theta1,tempo)   #rBx=R_ob[1], rBy=R_ob[2]
176     posB=np.append(posB,[R_ob],axis=0)
177     # Point C
178     R_oc=posicaoC(theta1,theta2,R_ob[1],R_ob[2]) #rCx=R_oc[1], rCy=R_oc[2]
179     posC=np.append(posC,[R_oc],axis=0)
180     # Point D
181     R_od=posicaoD(theta1,theta2,theta3,R_oc[1],R_oc[2])#rDx=R_od[1], rDy=R_od
        [2]
182     posD=np.append(posD,[R_od],axis=0)
183     # ----- VELOCIDADE -----
184     # Point B
185     vB=velocidadeB(mov,tempo,theta1,thetap_1)
186     velB=np.append(velB,[vB],axis=0)
187     # Point C
188     vC=velocidadeC(mov,tempo,theta1,theta2,thetap_1,thetap_2,vB[1],vB[2])
189     velC=np.append(velC,[vC],axis=0)
190     # Point D
191     vD=velocidadeD(mov,tempo,theta1,theta2,theta3,thetap_1,thetap_2,thetap_3,
        vC[1],vC[2])
192     velD=np.append(velD,[vD],axis=0)
193     # ----- ACELERAÇÃO -----
194     # Point B
195     aB=aceleracaoB(mov,tempo,theta1,thetap_1,thetapp_1)
196     acelB=np.append(acelB,[aB],axis=0)
197     # Point C
198     aC=aceleracaoC(mov,tempo,theta1,theta2,thetap_1,thetap_2,thetapp_1,
        thetapp_2,
199         aB[1],aB[2])
200     acelC=np.append(acelC,[aC],axis=0)
201     # Point D
202     aD=aceleracaoD(mov,tempo,theta1,theta2,theta3,thetap_1,thetap_2,thetap_3,
        thetapp_1,
```

```
203         thetapp_2, thetapp_3, aC[1], aC[2])
204     acelD=np.append(acelD, [aD], axis=0)
205
206     ##### Theta 2 #####
207     for theta2 in Theta2:
208         mov=2
209         theta2_grad=(theta2*180/pi)
210         theta3=theta3_i
211         tempo=tempo+dtempo2
212         Tempo.append(tempo)
213     # ----- POSIÇÃO -----
214     R_ob=posicaoB(theta1, tempo) #rBx=R_ob[1], rBy=R_ob[2]
215     posB=np.append(posB, [R_ob], axis=0)
216     R_oc=posicaoC(theta1, theta2, R_ob[1], R_ob[2]) #rCx=R_oc[1], rCy=R_oc[2]
217     posC=np.append(posC, [R_oc], axis=0)
218     R_od=posicaoD(theta1, theta2, theta3, R_oc[1], R_oc[2]) #rDx=R_od[1], rDy=R_od
219         [2]
220     posD=np.append(posD, [R_od], axis=0)
221     # ----- VELOCITY -----
222     vB=velocidadeB(mov, tempo, theta1, thetap_1)
223     velB=np.append(velB, [vB], axis=0)
224     vC=velocidadeC(mov, tempo, theta1, theta2, thetap_1, thetap_2, vB[1], vB[2])
225     velC=np.append(velC, [vC], axis=0)
226     vD=velocidadeD(mov, tempo, theta1, theta2, theta3, thetap_1, thetap_2, thetap_3,
227         vC[1], vC[2])
228     velD=np.append(velD, [vD], axis=0)
229     # ----- ACELERAÇÃO -----
230     aB=aceleracaoB(mov, tempo, theta1, thetap_1, thetapp_1)
231     acelB=np.append(acelB, [aB], axis=0)
232     aC=aceleracaoC(mov, tempo, theta1, theta2, thetap_1, thetap_2, thetapp_1,
233         thetapp_2,
234         aB[1], aB[2])
235     acelC=np.append(acelC, [aC], axis=0)
236     aD=aceleracaoD(mov, tempo, theta1, theta2, theta3, thetap_1, thetap_2, thetap_3,
237         thetapp_1,
238         thetapp_2, thetapp_3, aC[1], aC[2])
239     acelD=np.append(acelD, [aD], axis=0)
240
241     ##### Theta 3 #####
242     for theta3 in Theta3:
```

```
239 mov=3
240 theta3_grad=(theta2*180/pi)
241 tempo=tempo+dtempo3
242 Tempo.append(tempo)
243 # ----- Posição -----
244 R_ob=posicaoB(theta1,tempo)
245 posB=np.append(posB,[R_ob],axis=0)
246 R_oc=posicaoC(theta1,theta2,R_ob[1],R_ob[2]) #rCx=R_oc[1], rCy=R_oc[2]
247 posC=np.append(posC,[R_oc],axis=0)
248 R_od=posicaoD(theta1,theta2,theta3,R_oc[1],R_oc[2]) #rDx=R_od[1], rDy=R_od
    [2]
249 posD=np.append(posD,[R_od],axis=0)
250 # ----- VELOCITY -----
251 vB=velocidadeB(mov,tempo,theta1,thetap_1)
252 velB=np.append(velB,[vB],axis=0)
253 vC=velocidadeC(mov,tempo,theta1,theta2,thetap_1,thetap_2,vB[1],vB[2])
254 velC=np.append(velC,[vC],axis=0)
255 vD=velocidadeD(mov,tempo,theta1,theta2,theta3,thetap_1,thetap_2,thetap_3,
    vC[1],vC[2])
256 velD=np.append(velD,[vD],axis=0)
257 # ----- ACELERAÇÃO -----
258 aB=aceleracaoB(mov,tempo,theta1,thetap_1,thetapp_1)
259 acelB=np.append(acelB,[aB],axis=0)
260 aC=aceleracaoC(mov,tempo,theta1,theta2,thetap_1,thetap_2,thetapp_1,
    thetapp_2, aB[1],aB[2])
261 acelC=np.append(acelC,[aC],axis=0)
262 aD=aceleracaoD(mov,tempo,theta1,theta2,theta3,thetap_1,thetap_2,thetap_3,
    thetapp_1,
263             thetapp_2,thetapp_3, aC[1],aC[2])
264 acelD=np.append(acelD,[aD],axis=0)
265
266 # ####Gráficos####
267 #Posição
268 plt.figure(figsize=(6,5),dpi=300)
269 plt.plot(posB[:,1],posB[:,2], linewidth=1.5, color="black",label='Ponto B')
270 plt.plot(posC[:,1],posC[:,2], linewidth=1.5, color="blue",label='Ponto C')
271 plt.plot(posD[:,1],posD[:,2], linewidth=1.5, color="red",label='Ponto D')
272 plt.xlabel('X [m]',fontsize='18');plt.ylabel('Y [m]',fontsize='18')
273 plt.legend(loc='best', fontsize=12); plt.xlim(0,0.7); plt.grid()
274 plt.xticks(fontsize=14); plt.yticks(fontsize=14); plt.show()
```

```
275 #Velocidade
276 plt.figure(figsize=(8,6),dpi=300)
277 plt.subplot(311)
278 plt.plot(Tempo,velB[:,3], linewidth=1.5, color="black",label='Mod. vB')
279 plt.xlim(Tempo[0],Tempo[-1]); plt.legend(loc='best', fontsize=12)
280 plt.xticks(fontsize=13); plt.yticks(fontsize=13); plt.grid(True)
281 plt.subplot(312)
282 plt.plot(Tempo,velC[:,3], linewidth=1.5, color="blue",label='Mod. vC')
283 plt.ylabel("Velocidade [m/s]",fontsize='18')
284 plt.xlim(Tempo[0],Tempo[-1]); plt.legend(loc='best', fontsize=12)
285 plt.xticks(fontsize=13); plt.yticks(fontsize=13); plt.grid(True)
286 plt.subplot(313)
287 plt.plot(Tempo,velD[:,3], linewidth=1.5, color="red",label='Mod. vD')
288 plt.xlabel("Tempo [s]",fontsize='18')
289 plt.xlim(Tempo[0],Tempo[-1]);plt.ylim(0,1.2*np.max(velD[:,3])); plt.legend(
    loc='best', fontsize=12); plt.grid(True)
290 plt.xticks(fontsize=13); plt.yticks(fontsize=13); plt.show()
291 #Aceleração
292 plt.figure(figsize=(8,6),dpi=300)
293 plt.subplot(311)
294 plt.plot(Tempo,acelB[:,3], linewidth=1.5, color="black",label='Mod. aB')
295 plt.xlim(Tempo[0],Tempo[-1]); plt.legend(loc='best', fontsize=12); plt.grid(
    True)
296 plt.xticks(fontsize=13); plt.yticks(fontsize=13) ;
297 plt.subplot(312)
298 plt.plot(Tempo,acelC[:,3], linewidth=1.5, color="blue",label='Mod. aC')
299 plt.ylabel("Aceleração [m/s^2]",fontsize='18')
300 plt.xlim(Tempo[0],Tempo[-1]); plt.legend(loc='best', fontsize=12); plt.grid(
    True)
301 plt.xticks(fontsize=13); plt.yticks(fontsize=13) ;
302 plt.subplot(313)
303 plt.plot(Tempo,acelD[:,3], linewidth=1.5, color="red",label='Mod. aD')
304 plt.xlim(Tempo[0],Tempo[-1]); plt.legend(loc='best', fontsize=12); plt.grid(
    True)
305 plt.xticks(fontsize=13); plt.yticks(fontsize=13) ;
306 plt.xlabel("Tempo [s]",fontsize='18') ;plt.show()
```

O código também encontra-se disponível no Github.

<https://raw.githubusercontent.com/ManipuladorRRR2D/ManipuladorRRR2D.py>

2.3.7 Guindaste

O mecanismo apresentado a seguir é um sistema articulado com movimento no espaço tridimensional. O guindaste da figura 2.38 possui rotações simultâneas nos eixos Z e Y. Antes de aplicarmos as equações cinemáticas, devemos retirar o máximo de informações que o desenho esquemático nos apresenta.

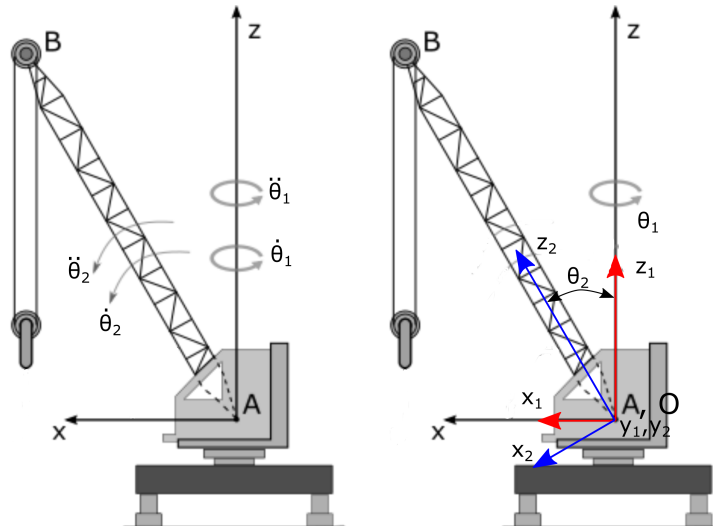


Figura 2.38. Guindaste. Fonte: Autor

Como o sistema possui duas rotações, são colocados dois referenciais móveis para representar essas rotações, e as velocidades e acelerações angulares são definidas abaixo,

$${}_I\vec{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}; \quad {}_I\vec{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}; \quad {}_{M_1}\dot{\theta}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}_{M_1}\ddot{\theta}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (231)$$

Diante da existência de duas rotações, podemos nos antecipar a necessidade e obter a matriz de transformada de coordenadas do referencial Móvel 2 para o referencial Inercial,

$$\begin{aligned}
 T_{\theta_1}^\top \cdot T_{\theta_2}^\top &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\text{sen}(\theta_1) & 0 \\ \text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & 0 & \text{sen}(\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta_2) & 0 & \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) & -\text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1)\text{sen}(\theta_2) \\ \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2) & \cos(\theta_1) & \text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_2) \\ -\text{sen}(\theta_2) & 0 & \cos(\theta_2) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{232}$$

Posição

O vetor posição do ponto B, descrito no referencial Inercial, é definido na equação 233 e obtido em 234.

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{r}_{OB} &= {}_I\vec{r}_{OA} + {}_I\vec{r}_{AB} \\
 {}_I\vec{r}_{OB} &= T_{\theta_1}^\top \cdot T_{\theta_2}^\top \cdot M_2 \vec{r}_{AB}
 \end{aligned} \tag{233}$$

$${}_I\vec{r}_{OB} = \begin{bmatrix} r_{Bx} \\ r_{By} \\ r_{Bz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(\theta_1)C(\theta_2) & -S(\theta_1) & C(\theta_1)S(\theta_2) \\ S(\theta_1)C(\theta_2) & C(\theta_1) & S(\theta_1)S(\theta_2) \\ -S(\theta_2) & 0 & C(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{AB} C(\theta_1)S(\theta_2) \\ L_{AB} S(\theta_1)S(\theta_2) \\ L_{AB} C(\theta_2) \end{bmatrix} \tag{234}$$

Exemplo

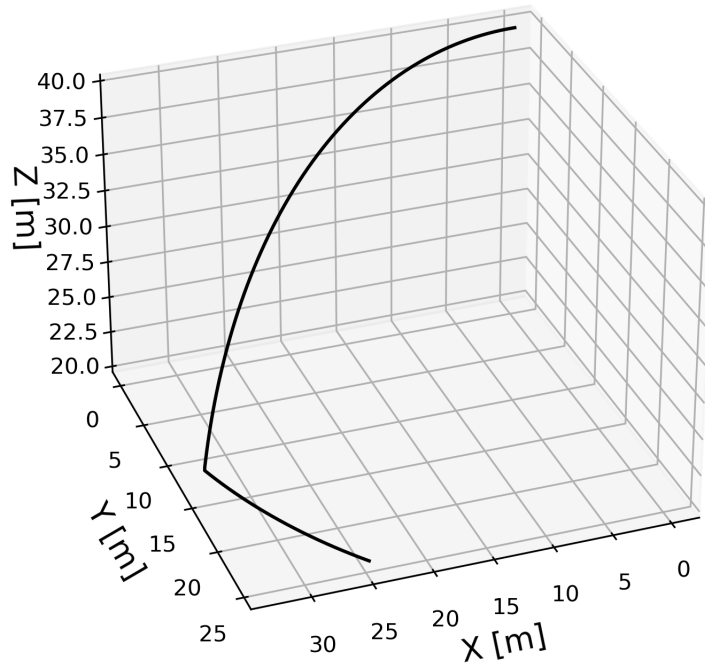
Considere que a lança AB do guindaste possui 30 m de comprimento e inicialmente está totalmente na vertical, ou seja, $\theta_2 = 0^\circ$, além disso, iremos considerar como posição inicial $\theta_1 = 0^\circ$. Gere um gráfico da trajetória do ponto B quando o guindaste se movimenta para um $\theta_1 = 45^\circ$ e $\theta_2 = 60^\circ$.

Velocidade

O vetor velocidade ${}_I\vec{v}_B$ é definido na equação 235,

$${}_I\vec{v}_B = {}_I\vec{v}_A + {}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{AB} + v_{relAB} \tag{235}$$

Figura 2.39. Trajetória do ponto B.



O vetor velocidade angular do móvel 2 representado no referencial Inercial é obtido com a equação 236,

$${}_I\vec{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C(\theta_1) & -S(\theta_1) & 0 \\ S(\theta_1) & C(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 S(\theta_1) \\ \dot{\theta}_2 C(\theta_1) \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (236)$$

Resolvendo o produto vetorial, temos

$${}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\dot{\theta}_2 S(\theta_1) & \dot{\theta}_2 C(\theta_1) & \dot{\theta}_1 \\ L_{AB} C(\theta_1)S(\theta_2) & L_{AB} S(\theta_1)S(\theta_2) & L_{AB} C(\theta_2) \end{vmatrix} \\ = \begin{bmatrix} L_{AB} (\dot{\theta}_2 C(\theta_1)C(\theta_2) - \dot{\theta}_1 S(\theta_1)S(\theta_2)) \\ L_{AB} (\dot{\theta}_2 S(\theta_1)C(\theta_2) + \dot{\theta}_1 C(\theta_1)S(\theta_2)) \\ -L_{AB}\dot{\theta}_2 S(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (237)$$

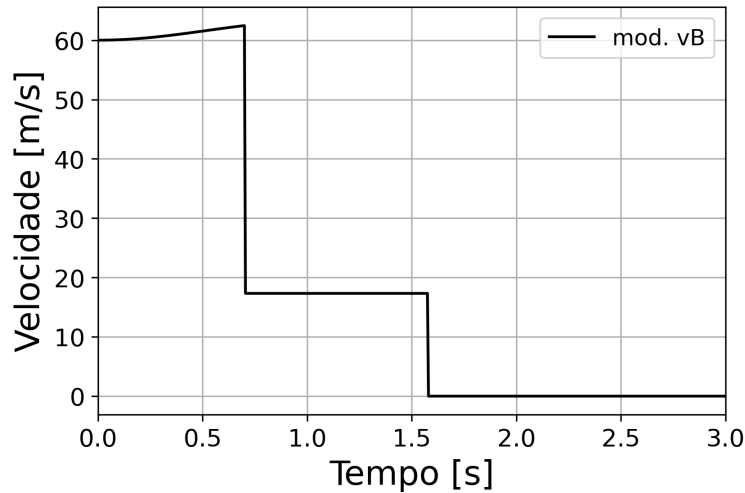
Logo, a velocidade do ponto B pode ser computada com a equação 238.

$${}^I\vec{v}_B = \begin{bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \\ v_{Bz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{AB} (\dot{\theta}_2 C(\theta_1)C(\theta_2) - \dot{\theta}_1 S(\theta_1)S(\theta_2)) \\ L_{AB} (\dot{\theta}_2 S(\theta_1)C(\theta_2) + \dot{\theta}_1 C(\theta_1)S(\theta_2)) \\ -L_{AB}\dot{\theta}_2 S(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (238)$$

Exemplo

Continuando o exemplo, consideraremos agora que o guindaste está rotacionando a uma velocidade angular $\dot{\theta}_1 = 0.5$ [ras/s] em torno no eixo z, e simultaneamente está rotacionando a uma velocidade angular $\dot{\theta}_2 = 1.5$ [ras/s] em torno do eixo y_1 . O módulo da velocidade em função do tempo é apresentado na figura 2.40.

Figura 2.40. Velocidade do ponto B.



Aceleração

O vetor aceleração absoluta do ponto B, ${}^I\vec{a}_B$, é definido na equação 239,

$$\begin{aligned} {}^I\vec{a}_B &= {}^I\vec{a}_A + {}^I\vec{\alpha}_2 \times {}^I\vec{r}_{AB} + {}^I\vec{\omega}_2 \times ({}^I\vec{\omega}_2 \times {}^I\vec{r}_{AB}) + 2{}^I\vec{\omega}_2 \times {}^I\vec{v}_{RelAB} + {}^I\vec{a}_{RelAB} \\ {}^I\vec{a}_B &= {}^I\vec{\alpha}_2 \times {}^I\vec{r}_{AB} + {}^I\vec{\omega}_2 \times ({}^I\vec{\omega}_2 \times {}^I\vec{r}_{AB}) \end{aligned} \quad (239)$$

O vetor aceleração angular ${}^I\vec{\alpha}_2$ do móvel 2 representado no referencial Inercial é obtido com a equação 240,

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{\alpha}_2 &= {}_I\vec{\alpha}_1 + T_{\theta_1}^\top M_1 \ddot{\theta}_2 \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_2 \sin(\theta_1) \\ \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1) \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{240}$$

Resolvendo os produtos, a aceleração tangencial do ponto B é

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{\alpha}_2 \times {}_I\vec{r}_{AB} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\ddot{\theta}_2 S(\theta_1) & \ddot{\theta}_2 C(\theta_1) & \ddot{\theta}_1 \\ L_{AB} C(\theta_1) S(\theta_2) & L_{AB} S(\theta_1) S(\theta_2) & L_{AB} C(\theta_2) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} L_{AB} \left(-\ddot{\theta}_1 S(\theta_1) S(\theta_2) + \ddot{\theta}_2 C(\theta_1) C(\theta_2) \right) \\ L_{AB} \left(\ddot{\theta}_1 C(\theta_1) S(\theta_2) + \ddot{\theta}_2 S(\theta_1) C(\theta_2) \right) \\ -L_{AB} \ddot{\theta}_2 S(\theta_2) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{241}$$

A aceleração normal,

$${}_I\vec{\omega}_2 \times ({}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{AB}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\dot{\theta}_2 S(\theta_1) & \dot{\theta}_2 C(\theta_1) & \dot{\theta}_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \tag{242}$$

As variáveis β_1 , β_2 e β_3 são usadas para deixar a equação compacta e melhorar a organização. Elas são definidas a seguir,

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= L_{AB} \left(-\dot{\theta}_1 S(\theta_1) S(\theta_2) + \dot{\theta}_2 C(\theta_1) C(\theta_2) \right) \\
 \beta_2 &= L_{AB} \left(\dot{\theta}_1 C(\theta_1) S(\theta_2) + \dot{\theta}_2 S(\theta_1) C(\theta_2) \right) \\
 \beta_3 &= -L_{AB} \dot{\theta}_2 S(\theta_2)
 \end{aligned} \tag{243}$$

O resultado do produto vetorial da equação 242 é portando,

$${}_I\vec{\omega}_2 \times ({}_I\vec{\omega}_2 \times {}_I\vec{r}_{AB}) = \begin{bmatrix} -L_{AB} \left((\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) C(\theta_1) S(\theta_2) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 S(\theta_1) C(\theta_2) \right) \\ -L_{AB} \left((\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) S(\theta_1) S(\theta_2) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 C(\theta_1) C(\theta_2) \right) \\ -L_{AB} \dot{\theta}_2^2 C(\theta_2) \end{bmatrix} \tag{244}$$

Adicionando os resultados das equações 241 e 244 na equação 239, temos

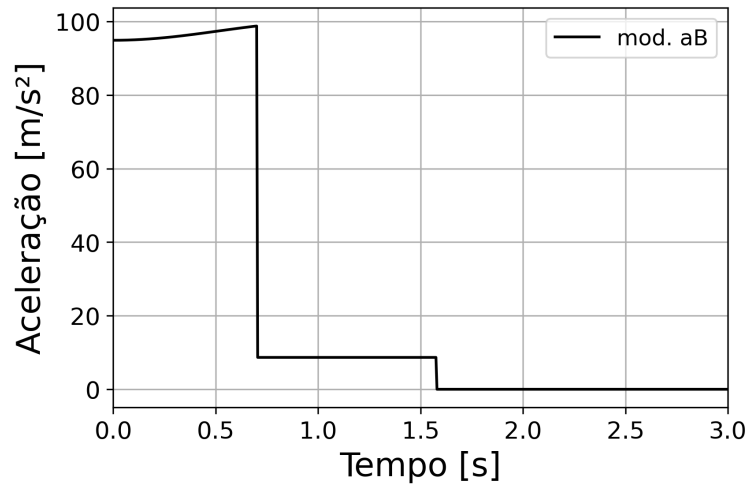
$${}_I\vec{a}_B = \begin{bmatrix} aBx \\ aBy \\ aBz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{AB} \left(-\ddot{\theta}_1 S(\theta_1)S(\theta_2) + \ddot{\theta}_2 C(\theta_1)C(\theta_2) \right) \\ L_{AB} \left(\ddot{\theta}_1 C(\theta_1)S(\theta_2) + \ddot{\theta}_2 S(\theta_1)C(\theta_2) \right) \\ -L_{AB}\ddot{\theta}_2 S(\theta_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_{AB} \left((\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) C(\theta_1)S(\theta_2) + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 S(\theta_1)C(\theta_2) \right) \\ -L_{AB} \left((\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) S(\theta_1)S(\theta_2) - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 C(\theta_1)C(\theta_2) \right) \\ -L_{AB}\dot{\theta}_2^2 C(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (245)$$

Logo, a aceleração absoluta do ponto B, definida no referencial Inercial, pode ser calculada com a equação 245.

Exemplo

Dando continuidade ao exemplo, vamos assumir que as acelerações angulares α_1 e α_2 são ambas nulas. A consequência disto é que a aceleração tangencial também será nula, restando somente a componente normal da aceleração. A aceleração do ponto B em função do tempo é apresentada na figura 2.41.

Figura 2.41. Aceleração do ponto B.



Convido o leitor a buscar gerar gráficos utilizando a equação 245 e considerando valores não nulos para as acelerações angulares.

Python

A seguir é apresentado um código em Python utilizado para gerar os gráficos da posição, velocidade e aceleração do mecanismo articulado representando um Guindaste.

```
1  """
2  Instituto Federal do Rio Grande do Sul
3  Programa: Cinemática de um Guindaste
4  Author: Prof. Dr. Felipe Rodrigues de Freitas Neto
5  Data: 04/10/2023
6  """
7  import numpy as np
8  from numpy import cos,sin,sqrt,pi
9  import matplotlib.pyplot as plt
10 from matplotlib.pyplot import legend,xlabel,ylabel,xticks, yticks
11 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
12
13 tfinal,dt= 3,0.005 #[s]
14 T=np.arange(0,tfinal+dt,dt)
15 #Parametros
16 l=40.0 # [m]
17
18 omega1, omega2= 0.5, 1.5#[rad/s]
19 alpha1, alpha2 = 0, 0 #[rad/s^2]
20
21 theta1=0*(pi/180) ; theta1_f=45*(pi/180); theta1_old=theta1
22 theta2=0*(pi/180) ; theta2_f=60*(pi/180); theta2_old=theta2
23
24 posB=np.empty((0,7),dtype=float) ; velB=np.empty((0,9),dtype=float)
25 acelB=np.empty((0,7),dtype=float)
26 #Posição
27 def posicaoB(t,theta1,theta2):
28     rOBx= l*cos(theta1)*sin(theta2)
29     rOBy= l*sin(theta1)*sin(theta2)
30     rOBz= l*cos(theta2)
31     modB=sqrt(rOBx**2+rOBy**2+rOBz**2)
32     rB=np.array([t,rOBx,rOBy,rOBz,modB,(theta1*180/pi),(theta2*180/pi) ])
33     return rB
34 #Velocidade
35 def velocidadeB(t,theta1,theta2,omega1,omega2):
36     vBx= l*(omega2*cos(theta1)*cos(theta2) - omega1*sin(theta1)*sin(theta2))
```

```
37     vBy= 1*(omega2*sin(theta1)*cos(theta2) + omega1*cos(theta1)*sin(theta2))
38     vBz= -1*omega2*sin(theta2)
39     modvB=sqrt(vBx**2+vBy**2+vBz**2)
40     vB=np.array([t,vBx,vBy,vBz,modvB,(theta1*180/pi),(theta2*180/pi),omega1,
41                 omega2])
42     return vB
43 #Aceleraao
44 def aceleracaoB(t,theta1,theta2,omega1,omega2,alpha1,alpha2):
45     aTanx= 1*(alpha2*cos(theta1)*cos(theta2) -alpha1*sin(theta1)*sin(theta2)
46            )
47     aTany= 1*(alpha2*sin(theta1)*cos(theta2) +alpha1*cos(theta1)*sin(theta2)
48            )
49     aTanz= -1*alpha2*sin(theta2)
50     aNormx= -1*((omega1**2+omega2**2)*cos(theta1)*sin(theta2) + omega1*
51              omega2*sin(theta1)*cos(theta2))
52     aNormy= -1*((omega1**2+omega2**2)*sin(theta1)*sin(theta2) - omega1*
53              omega2*cos(theta1)*cos(theta2))
54     aNormz= -1*(omega2)**2*cos(theta2)
55
56     aBx= aTanx + aNormx ;      aBy= aTany + aNormy ;      aBz= aTanz + aNormz
57     modaB=sqrt(aBx**2+aBy**2+aBz**2)
58     aB=np.array([t,aBx,aBy,aBz,modaB,(theta1*180/pi),(theta2*180/pi)])
59     return aB
60
61 for t in T:
62
63     #Posiao do ponto B
64     rB=posicaoB(t,theta1,theta2)
65     posB=np.append(posB,[rB],axis=0)
66     #Velocidade do ponto B
67     vB=velocidadeB(t,theta1,theta2,omega1,omega2)
68     velB=np.append(velB,[vB],axis=0)
69     #Aceleraao do ponto B
70     aB=aceleracaoB(t,theta1,theta2,omega1,omega2,alpha1,alpha2)
71     acelB=np.append(acelB,[aB],axis=0)
72
73     #Theta 1
74     dTheta_1=omega1*dt+0.5*alpha1*dt**2
75     if (omega1<0 and (abs(theta1)>(theta1_f-abs(dTheta_1)) and abs(theta1)<(
76         theta1_f+abs(dTheta_1))))):
```

```
71     theta1=theta1_f
72 elif(omega1<0 and (abs(theta1)<(theta1_f-abs(dTheta_1)) or abs(theta1)>(
73     theta1_f+abs(dTheta_1)))):
74     theta1=theta1+dTheta_1
75 elif(omega1>0 and (theta1>(theta1_f-abs(dTheta_1)) and theta1<(theta1_f+
76     abs(dTheta_1)))): #ok
77     theta1=theta1_f
78 elif(omega1>0 and (theta1<(theta1_f-abs(dTheta_1)) or theta1>(theta1_f+
79     abs(dTheta_1)))): #ok
80     theta1=theta1+dTheta_1
81 #Theta 2
82 dTheta_2=omega2*dt+ 0.5*alpha2*dt**2
83 if (omega2<0 and (abs(theta2)>(theta2_f-abs(dTheta_2)) and abs(theta2)<(
84     theta2_f+abs(dTheta_2)))):
85     theta2=theta2_f
86 elif(omega2<0 and (abs(theta2)<(theta2_f-abs(dTheta_2)) or abs(theta2)>(
87     theta2_f+abs(dTheta_2)))):
88     theta2=theta2+dTheta_2
89 elif(omega2>0 and (theta2>(theta2_f-abs(dTheta_2)) and theta2<(theta2_f+
90     abs(dTheta_2)))): #ok
91     theta2=theta2_f
92 elif(omega2>0 and (theta2<(theta2_f-abs(dTheta_2)) or theta2>(theta2_f+
93     abs(dTheta_2)))): #ok
94     theta2=theta2+dTheta_2
95 #omega 1
96 if(theta1==theta1_old): omega1=0
97 else: omega1=omega1+alpha1*dt
98 #omega 2
99 if(theta2==theta2_old): omega2=0
100 else: omega2=omega2+alpha2*dt
101 theta1_old=theta1; theta2_old=theta2
102 #alpha 1
103 if(theta1==theta1_old): alpha1=0
104 else: alpha1=alpha1
105 #alpha 2
106 if(theta2==theta2_old): alpha2=0
107 else: alpha2=alpha2
108 theta1_old=theta1; theta2_old=theta2
109 #Gráfico da Posição ;ax.set_zlim(10,30)
```

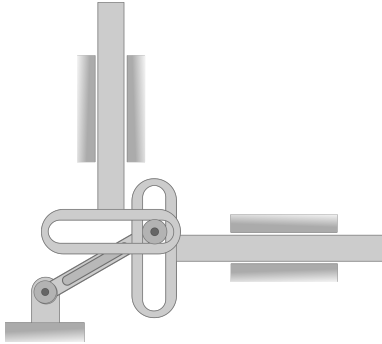
```
104 fig=plt.figure(figsize=(8,6),dpi=300)
105 ax=fig.add_subplot(111,projection='3d')
106 ax.plot(posB[:,1].flatten(),posB[:,2].flatten(),posB[:,3].flatten(), label='
    Ponto B',color='black',linewidth=1.5)
107 ax.set_xlabel('X [m]',fontsize=14) ; ax.set_ylabel('Y [m]',fontsize=14) ; ax
    .set_zlabel('Z [m]',fontsize=14)
108 ax.view_init(elev=30, azim=70) ; plt.show(block=True)
109 #Gráfico da Velocidade
110 plt.figure(figsize=(6,4),dpi=300)
111 plt.plot(velB[:,0],velB[:,4],label='mod. vB',color='black',linewidth=1.5) ;
    plt.grid(True)
112 plt.xlim(velB[0,0],velB[-1,0]); plt.xlabel("Tempo [s]",fontsize='18'); plt.
    ylabel("Velocidade [m/s]",fontsize='18')
113 xticks(fontsize=13); yticks(fontsize=13); legend(loc='best', fontsize=12) ;
    plt.show()
114 #Gráfico da Aceleração
115 plt.figure(figsize=(6,4),dpi=300)
116 plt.plot(accelB[:,0],accelB[:,4],label='mod. aB',color='black',linewidth=1.5)
    ; plt.grid(True)
117 plt.xlim(accelB[0,0],accelB[-1,0]); xlabel("Tempo [s]",fontsize='18'); ylabel(
    "Aceleração [m/s^2]",fontsize='18')
118 xticks(fontsize=13); yticks(fontsize=13); legend(loc='best', fontsize=12) ;
    plt.show()
```

O código também encontra-se disponível no Github.

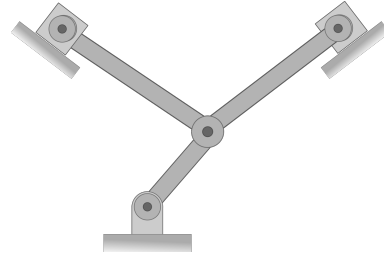
<https://raw.githubusercontent.com/guindaste.py>

2.4 Exemplos propostos

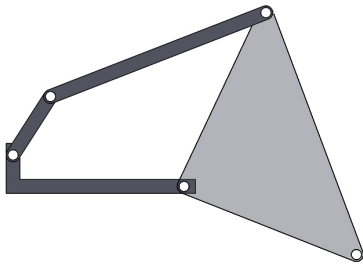
Nesta seção são apresentados alguns mecanismos a mais, para que o leitor possa exercitar os conhecimentos adquiridos.



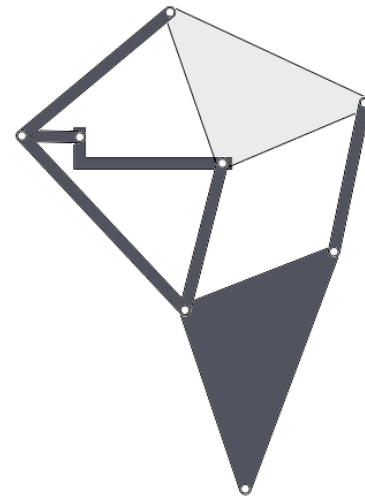
(a) Garfo escocês duplo



(b) Biela-Manivela dupla



(c) Quatro barras



(d) Mecanismos de Theo Jansen

Referências Bibliográficas



- Carvalho, J. C. M., Ibrahim, R. C., and Coelho, T. A. H. (c2018). *Mecanismos, máquinas e robôs: uma abordagem unificada para a análise e síntese*. Elsevier, Rio de Janeiro, RJ.
- Chapra, S. (2014). *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill Education.
- community, T. S. (2023). Scipy documentation.
- Flores, P. (2012). *Análise cinemática e dinâmica dos mecanismos: exercícios resolvidos e propostos*. Publindústria, Porto-Portugal.
- Flores, P. and Claro, J. P. (2005). *Cinemática de mecanismos*.
- Jansen, T. (2022). *Strandbeest*.
- Mabie, H. H. and Ocvirk, F. W. (1980). *Mecanismos*. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 2 edition.
- Norton, R. (2010). *Cinemática e dinâmica dos mecanismos*. McGraw Hill Brasil.
- Santos, I. (2001). *Dinâmica de sistemas mecânicos: modelagem, simulação, visualização, verificação*. Makron.

Índice Remissivo

- Aceleração, 6, 16, 27, 32, 36–40, 43, 45, 47, 53, 56, 58–60, 62, 70, 73, 80, 81, 84, 89, 91–93, 100–103
- Articulações, 6, 13, 14, 61, 83
- Biela-Manivela, 6, 31, 32
- Cinemática, 6, 10–13, 16, 37, 40, 42, 50, 53, 57, 67, 76, 83, 84, 97
- Garfo escocês, 8, 31, 39, 41, 45
- Guindaste, 31, 99, 100, 103
- Manipulador robótico, 11, 76, 81, 83, 87
- Matriz de transformada de coordenadas, 19, 29, 85, 98
- Matrizes, 6, 28, 32, 39, 46, 61, 83, 84
- Mecanismos, 6–8, 10, 12, 13, 31, 32, 35, 36, 46, 53, 58, 61, 106
- Mobilidade, 14, 15
- Movimento no espaço, 97
- Movimento no plano, 29
- Posição, 6, 16–19, 25, 27, 32, 34, 36, 39–41, 43, 45, 46, 48, 59–62, 77, 81, 84–86, 88–90, 92, 93, 98, 99, 103
- Programação Python, 6, 73
- Quatro barras, 6, 9, 10, 31, 60, 61
- Referencial inercial, 18–20, 24, 26, 28, 31, 39, 76, 83, 85, 98, 99, 101, 102
- Referencial móvel de rotação, 31, 76, 83
- Retorno rápido, 8, 31, 46, 53, 58, 59
- Sistema de coordenadas, 18
- Sistemas articulados, 13
- Trajetória, 16, 18, 25, 78, 87, 99
- Velocidade, 6, 8, 9, 16–23, 25–30, 38, 40, 41, 43, 45, 50, 52, 53, 58, 59, 67, 69, 71, 73, 78, 79, 81, 83, 84, 87–90, 92, 93, 97, 99, 100, 103

Sobre o autor



  **Felipe Rodrigues de Freitas Neto.** Possui bacharelado em Engenharia Mecânica (2012) pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Mestre em Engenharia Mecânica (2015) pela UFRN, Licenciado em Formação Docente para a Educação Básica – Matemática (2019) na Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) e Doutor em Engenharia Mecânica (2020) pela UFRN. Foi professor temporário de Engenharia Mecânica na UFRN (2013-2014), onde lecionou as disciplinas de Dinâmica, Mecanismos e Vibrações Mecânicas. Desde dezembro de dois mil e dezesseis é professor do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), onde atua no curso técnico em Eletromecânica e no bacharelado em Engenharia Mecânica. Trabalha com modelagem, simulação e controle de sistemas mecânicos. Contatos: felipe.neto@farroupilha.ifrs.edu.br, eng.mec.feliperodrigues@gmail.com.

Este livro é voltado ao estudo da cinemática de mecanismos através de uma abordagem com vetores e matrizes. A abordagem matricial facilita uma posterior implementação numérica e permite que o aluno possa evoluir facilmente do movimento no plano para o movimento no espaço.

Diante da escassez de material didático que utilize essa abordagem em mecanismos comuns na Engenharia Mecânica, os exemplos utilizados na docência da disciplina Mecanismos e Dinâmica de Máquinas conduziram a elaboração desta obra.

A metodologia aqui aplicada, apesar de simples, exige que o aluno tenha conhecimentos prévios adquiridos em cursos de Mecânica Geral, Álgebra e Geometria Analítica, dando então uma característica multidisciplinar.

Para facilitar a compreensão e permitir a visualização da posição, velocidade e aceleração dos mecanismos, diversos gráficos são apresentados nos exemplos aplicados.

As implementações numéricas das equações matemáticas obtidas, foram realizadas utilizando a linguagem de programação Python e os códigos dos programas foram escritos na obra e também disponibilizados no GitHub, para que os alunos possam explorar o comportamento dos mecanismos para diferentes parâmetros.

Buscou-se deixar a escrita textual simples e informal para uma maior compreensão por parte do aluno. E espera-se que este livro sirva como auxílio em aulas de Mecanismos tanto para alunos quanto para professores.



ISBN 978-65-85756-15-0



9786585756150

Pantanal Editora

Rua Abaete, 83, Sala B, Centro. CEP: 78690-000

Nova Xavantina - Mato Grosso - Brasil

Telefone (66) 99682-4165 (Whatsapp)

<https://www.editorapantanal.com.br>

contato@editorapantanal.com.br