Educação: dilemas contemporâneos

Volume XVII

Lucas Rodrigues Oliveira
Organizador

Pantanal Editora

2023

Lucas Rodrigues Oliveira
Organizador

Educação: dilemas contemporâneos
Volume XVII

Pantanal Editora

2023

Editor Chefe: Prof. Dr. Alan Mario Zuffo
Editores Executivos: Prof. Dr. Jorge González Aguilera e Prof. Dr. Bruno Rodrigues de Oliveira

Diagramação: A editora. **Diagramação e Arte:** A editora. **Imagens de capa e contracapa:** Canva.com. **Revisão:** O(s) autor(es), organizador(es) e a editora.

Ficha Catalográfica

Catalogação na publicação
Elaborada por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

E24

Educação: dilemas contemporâneos - Volume XVII / Lucas Rodrigues Oliveira (Organizador). – Nova Xavantina-MT: Pantanal, 2023. 59p.

Livro em PDF

ISBN 978-65-85756-01-3
DOI https://doi.org/10.46420/9786585756013

1. Educação. 2. Leitura. 3. Alfabetização. 4. Letramento. I. Oliveira, Lucas Rodrigues (Organizador). II. Título.

CDD 370

Índice para catálogo sistemático

I. Educação

Pantanal Editora

Rua Abaete, 83, Sala B, Centro. CEP: 78690-000.
Nova Xavantina – Mato Grosso – Brasil.
Telefone (66) 99682-4165 (Whatsapp).
https://www.editorapantanal.com.br
contato@editorapantanal.com.br

Apresentação

Convidamos o leitor a prestigiar este décimo sétimo volume da obra "Educação: dilemas contemporâneos". É necessário, sempre, prosseguirmos com as discussões a respeito da educação brasileira, afinal, mesmo com os reconhecidos avanços, ela está distante de ser considerada justa e igual.

Diante disso, apresentamos essa obra, composta por três capítulo, que tratam de temas relevantes no âmbito educacional:

O primeiro, "O papel da literatura infantil nas práticas pedagógicas para alfabetização e letramento", busca evidenciar como a literatura – que é uma arte essencial para nos tornar humanos – pode contribuir, de forma significativa para a alfabetização e o letramento de crianças.

O segundo capítulo trata de um tema bastante contemporâneo, envolvendo a inteligência artificial (IA) e a utilização de uma ferramenta tecnológica cuja utilização já é motivo de acalorados debates, o ChatGPT; o capítulo é intitulado: "Perspectivas da Inteligência Artificial na Educação: Modelagem computacional, Semântica e ChatGPT".

No terceiro capítulo – que permite que essa obra se arraigue ainda mais nos diálogos da educação contemporânea – intitulado: "Direito à Educação: perspectivas sócio educacionais sobre a implementação do "Novo" Ensino Médio", objetiva refletir sobre o programa do novo ensino médio brasileiro (que, inclusive, é alvo de suspensão das medidas de implementação), por meio de uma abordagem crítica, a fim de compreender as razões e impactos na educação nacional.

Por fim, no último capítulo intitulado "Um breve estudo sobre dízimas periódicas", os autores abordam os conceitos de dízima periódica e fração geratriz, ressaltando sua importância para os estudantes/professores, por serem conceitos que permeiam vários outros assuntos matemáticos do cotidiano escolar e também são conhecimentos basilares em outras disciplinas.

Lucas Rodrigues Oliveira

Sumário

Capítulo IV

Um breve estudo sobre dízimas periódicas

Recebido em: 08/08/2023
Aceito em: 14/08/2023
10.46420/9786585756013cap4

Marco Aparecido Queiroz Duarte
Bruno Rodrigues de Oliveira

INTRODUÇÃO

As dízimas periódicas são números decimais que possuem uma parte que se repete infinitamente, chamada de período. Elas podem ser simples, quando o período vem logo após a vírgula, ou compostas, quando há uma parte não periódica entre a vírgula e o período. As dízimas periódicas são números racionais (ou uma expansão decimal do número racional (Cuoco e Rotman, 2013)), pois podem ser representadas por frações chamadas de frações geratrizes. Por outro lado, os números irracionais, como $\sqrt{2}$ e π, não podem ser representados por uma única fração, mas tão somente por frações contínuas infinitas (Conway e Guy, 1996). Acrescenta-se à esta característica um teorema, o qual estabelece que: todo número racional estritamente positivo possui uma representação decimal que é uma dízima periódica ou um número finito (Niven, 1961; Domingues, 1991). Por exemplo, $\frac{1}{5} = 0{,}2$ tem uma representação finita; por outro lado, a fração $\frac{1}{7} = 0{,}14285714285\ldots = 0,\overline{142857}$, tem uma representação infinita. É claro que podemos escrever: $\frac{1}{5} = 0{,}20000\ldots = 0{,}2\overline{0}$. Dessa forma, podemos concluir que esta fração também é uma dízima periódica, cujo período é o número 0. Entretanto, para distinguir a dízima periódica dos demais decimais, consideramos apenas aqueles números cujo período seja diferente de zero, adoção comum na literatura da álgebra (Cuoco e Rotman, 2013).

As dízimas periódicas surgem ao realizar a divisão entre o numerador e o denominador de uma fração n/N, com n, N número inteiros diferentes de zero, quando os restos dessa divisão são um dos números do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, N-1\}$, e, portanto, a aplicação do algoritmo da divisão não cessa, pois os restos, nas divisões parciais, continuarão divisíveis pelo denominador (indefinidamente). Haverá, portanto, N divisões parciais até que um dos restos no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, N-1\}$ se repita. Quando ocorre essa repetição, os restos obtidos nas divisões anteriores surgirão, nas divisões parciais sucessivas, na mesma ordem de surgimento anterior. Se a repetição acontecer na m-ésima divisão parcial, então a dízima terá um período de $m-1$ dígitos (Niven, 1961; Barbosa, 2010). Cuoco e Rotman (2013) apresentam uma proposição estabelecendo que um número racional (dízima periódica) $x = n/N$ tem período no máximo igual a N.

Para exemplificar as afirmações anteriores, considere, por exemplo, a fração $\frac{41}{333}$. As divisões sucessivas geram os restos $77, 104, 41, 77,104,41, \ldots$ Ou seja, os restos se repetem a partir da quarta divisão parcial, portanto, esta é uma dízima periódica cujo período tem três algarismos. Essa dízima é $0,123123123 \ldots = 0, \overline{123}$, ou seja, $\frac{41}{333} = 0,123123123 \ldots$ Note ainda que todos os restos são menores que o denominador 333.

A conversão de dízimas periódicas em frações geratrizes simplifica os cálculos em diversos problemas, uma vez que é mais fácil operar com frações do que com decimais longos (muitos dígitos). Aplicações das frações geratrizes em dízimas periódicas incluem: conversão de medidas de ângulos entre graus e radianos, pois alguns ângulos geram valores decimais periódicos em radianos, como 30°, que equivale a 0,166666... πrad; na conversão de medidas de comprimento entre sistemas métricos, porque certos valores geram dízimas periódicas, como, por exemplo ao operar com medidas envolvendo polegadas; ou também na resolução de problemas envolvendo proporções, razões e porcentagens, já que em várias situações ocorrem números decimais periódicos. Do ponto de vista teórico, o conceito de dízima periódica também é importante para a formação matemática, pois colabora para a compreensão da extensão do conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais (Ergene e Ergene, 2020).

Neste capítulo discutimos o conceito de dízima periódica e fração geratriz, apresentando as técnicas comumente empregadas para obtenção das frações geratrizes a partir dos números decimais. Também apresentamos uma técnica menos explorada para obter uma fração geratriz de uma dízima periódica composta. Este texto tem propósitos didáticos, e como público alvo estudantes da educação básica e seus professores. Portanto, por se tratar apenas de um texto expositivo/explicativo, não foi aplicado qualquer rigor matemático, em relação a demonstrações de resultados etc.

DISCUSSÕES

Dízimas periódicas podem ser classificadas como simples ou compostas. Dízima periódica simples é aquela em que o período aparece imediatamente após a vírgula. Enquanto que, na dízima periódica composta, há algarismos entre a vírgula e o início do período, esses algarismos formam o antiperíodo. Por exemplo, o número

$$1,375375375\ldots$$

é uma dízima periódica simples cujo período é 375, enquanto que o número

$$0,2182828282\ldots$$

é uma dízima periódica composta, com período igual a 82 e antiperíodo igual a 21.

No cotidiano escolar, os estudantes e professores se deparam com problemas onde lhes é apresentada uma dízima periódica (simples ou composta) e solicitado que seja determinada sua fração geratriz.

Existem métodos práticos que dispensam qualquer tipo de cálculo para obter esta fração. Por exemplo, para uma dízima periódica simples basta construirmos uma fração onde o numerador é o período e denominador é um número formado por tantos 9 quantos forem os algarismos do período. Assim, a dízima periódica $0{,}3333333\ldots = 0{,}\overline{3}$ tem como fração geratriz $\frac{3}{9}$ ou, simplificando por 3, tem-se como resultado $\frac{1}{3}$. Já a dízima $0{,}5252525252\ldots = 0{,}\overline{52}$ é gerada pela fração $\frac{52}{99}$.

Quando o número contém parte inteira, somamos a parte inteira a fração geratriz. Veja:

$$3{,}712712712712\ldots = 3{,}\overline{712}$$

$$3{,}712712712712\ldots = 3 + 0{,}712712712712\ldots = 3 + \frac{712}{999} = \frac{3709}{999}.$$

Nos exemplos anteriores, efetuando as devidas divisões, verificamos que os restos são sempre menores que os denominadores, e que se repetem conforme estabelecido nos resultados mencionados na introdução.

Vejamos, por exemplo, o caso da fração geratriz $\frac{52}{99}$. Os restos da divisão de 52 por 99, são, sucessivamente: $25, 52, 25, 52, \ldots$. Ou seja, o resto se repete na terceira divisão parcial, portanto, essa dízima periódica, que é $0{,}\overline{52}$, tem período 52, com dois algarismos. Observe ainda que todos os restos são menores do que 99.

Analisemos também o caso da fração geratriz $\frac{3709}{999}$, da dízima periódica composta $3{,}712712712712\ldots$ Os restos das divisões do numerador 3709 pelo denominador 999, são, sucessivamente: $712, 127, 271, 712, 127, 271, 712, \ldots$ Isto é, na quarta divisão parcial o resto se repete, então, essa dízima periódica tem período de 3 algarismos, conforme podemos verificar. Além disso, todos os restos são menores do que o denominador 999. Esta verificação pode ser feita pelo leitor em todos os exemplos abaixo enunciados.

Diferentemente dos casos anteriores, o estudante/professor já deve ter se deparado com o seguinte problema: "prove que $0{,}99999999\ldots = 1$". Nesse caso, não faz sentido dizer que $0{,}9999999\ldots = \frac{9}{9}$, resultado que teríamos ao proceder de modo análogo aos exemplos anteriores.

Para provar a igualdade acima, primeiro escrevemos a seguinte equação:

$$x = 0{,}99999999\ldots$$

Depois multiplicamos ambos os lados dessa equação por 10, obtendo

$$10x = 9{,}99999999\ldots = 9 + 0{,}99999999\ldots.$$

ou seja,

$$10x = 9 + x.$$

Resolvendo a última equação, chegamos a $x = 1$. Provando, portanto, que $0{,}99999999\ldots = 1$.

Usando o mesmo princípio, se tomarmos a dízima periódica simples $0{,}32323232\ldots$, basta escrevermos a equação $x = 0{,}32323232\ldots$ e multiplicarmos por 100, obtendo

$$100x = 32{,}32323232\ldots = 32 + 0{,}32323232323232 = 32 + x$$

E, resolvendo a equação $100x = 32 + x$, chegamos ao resultado: $x = \frac{32}{99}$, que é a fração geratriz da dízima periódica simples $0{,}32323232\ldots$

Por que multiplicamos x por 10 no primeiro exemplo e por 100 no segundo? Porque o número de zeros é igual ao número de algarismos do período. Ou seja, o número x deve ser multiplicado pelo número 1 seguido de tantos zeros quanto forem os algarismos do período.

E se for uma dízima periódica composta?

Um método prático, semelhante ao da dízima periódica simples, estabelece que devemos formar uma fração cujo numerador é o período e o denominador é iniciado por tantos noves quantos forem os algarismos do período e terminado por tantos zeros quanto for o número de zeros que separam a vírgula do período. Por exemplo, para a dízima periódica $0{,}0333333\ldots = 0{,}0\overline{3}$, que tem período com um algarismo e um zero entre a vírgula e o período, a fração geratriz é $\frac{3}{90}$, ou $\frac{1}{30}$.

Já para a dízima periódica composta $0{,}00372372372372\ldots$, seguindo o mesmo método, a fração geratriz é $\frac{372}{99900}$.

Assim, para a dízima periódica composta, quando os algarismos que antecedem o período são diferentes de zero: (i) separamos a parte periódica da não periódica; (ii) achamos a fração geratriz da dízima; e, (iii) depois somamos com a fração da parte não periódica.

Como exemplo, vamos encontrar a fração geratriz da dízima periódica composta $21{,}0325252525\ldots$. Basta fazermos:

$$21{,}0325252525\ldots = 21{,}03 + 0{,}0025252525\ldots = \frac{2103}{100} + \frac{25}{9900} = \frac{208222}{9900} = \frac{104111}{4950}$$

Porém, como aplicar o método em que a parte periódica é chamada de x e multiplicada por um número?

O processo que apresentamos para transformar dízima periódica simples em fração geratriz já é conhecido. Mas, o que apresentamos agora para dízimas periódicas compostas é inédito.

Primeiro, vejamos novamente o caso $0{,}0333333\ldots = 0{,}0\overline{3}$. Façamos $x = 0{,}0333333\ldots$. Depois, multiplicamos x por 91, obtendo

$$91x = 3{,}0333333\ldots$$

Ou seja,

$$91x = 3 + x$$

Resolvendo a última equação, obtemos $x = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$.

E para o caso $0{,}00372372372372\ldots$?

Fazemos $x = 0{,}00372372372372\ldots$ e depois o multiplicamos por 99901, obtendo

$$99901x = 372{,}00372372372372\ldots$$

isto é,

$$99901x = 372 + x$$

E, resolvendo a última equação, temos $x = \frac{372}{99900}$, que é a fração geratriz da dízima periódica composta $0{,}00372372372372\ldots$

Por que no primeiro exemplo o número x foi multiplicado por 91 e no segundo por 99901? Porque o número que multiplica x deve ser iniciado por tantos noves quantos forem os algarismos do período e sempre terminado por 1. Porém, antes do número 1, deve ser inserido o número de zeros que antecedem o período, menos 1. Assim, no último exemplo, o período tem três algarismos, logo, o número que multiplica x se inicia com três noves. Entre a vírgula e o período temos dois zeros, então entre o último nove e o número 1 teremos um zero.

Consideremos mais um exemplo. Vamos aproveitar e usar uma dízima cujo antiperíodo é diferente de zero: $2{,}3342222222222222\ldots$

Primeiro separamos a parte não periódica da parte periódica, fazendo

$$2{,}3342222222222222\ldots = 2{,}334 + 0{,}000222222222\ldots$$

Depois trabalhamos a parte periódica fazendo $x = 0{,}000222222222\ldots$. Note que x tem só um algarismo no período e três zeros entre a vírgula e o período. Isto significa que ele será multiplicado por 9001 (9 porque tem um algarismo no período, 00 porque são três zeros menos 1 e sempre terminando em 1). Assim, teremos

$$9001x = 2{,}000222222222\ldots = 2 + x$$

isto é,

$$9001x = 2 + x.$$

Portanto, $x = \frac{2}{9000}$ ou $x = \frac{1}{4500}$.

Acabamos de obter a fração geratriz da dízima $0{,}00022222222\ldots$ que é $\frac{1}{4500}$. Porém, estamos procurando a fração geratriz do número $2{,}3342222222222222\ldots$ Logo, podemos escrever:

$$2{,}3342222222222222\ldots = 2{,}334 + 0{,}000222222222\ldots = \frac{2334}{1000} + \frac{1}{4500}$$
$$= \frac{1167}{500} + \frac{1}{4500} = \frac{10504}{4500} = \frac{2626}{1125}$$

Portanto a fração geratriz da dízima periódica $2{,}3342222222222222\ldots$ é $\frac{2626}{1125}$.

Existem outros métodos práticos para transformar dízimas periódicas em frações. Um deles faz uso da soma de uma série geométrica convergente para determinar a fração geratriz de uma dízima periódica.

Uma série do tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1},$$

onde $a \neq 0$ e r são números reais, é chamada de série geométrica infinita ou simplesmente série geométrica. Uma série geométrica convergirá de acordo com o valor de r, que é chamado de razão da série (Leithould, 1994; Swokowski, 1995).

Se $|\mathrm{r}| < 1$ a série converge e tem por soma $S = \frac{1}{1-r}$.

Se $|r| \geq 1$ a série diverge.

Uma dizima periódica pode ser vista como uma série geométrica, pois, por exemplo, o número $0{,}555555\ldots$ pode ser escrito como a soma

$$0{,}5 + 0{,}05 + 0{,}005 + 0{,}0005 + 0{,}00005 + 0{,}000005 + \ldots$$

Neste caso, temos a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} 0{,}5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, com $a = 0{,}5$ e $r = \frac{1}{10}$. Como $|r| = \frac{1}{10} < 1$, então a série converge e sua soma é

$$S = \frac{0{,}5}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{5}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{5}{9}$$

que é a fração geratriz de dízima $0{,}555555\ldots$

No caso da dízima $1{,}27777777\ldots$, podemos primeiro escrever

$$1{,}27777777 = 1{,}2 + 0{,}07777777\ldots$$

Note $0{,}077777\ldots$, que corresponde a soma $0{,}07 + 0{,}007 + 0{,}0007 + 0{,}00007 + 0{,}000007 + 0{,}0000007 + \ldots$, é uma série infinita convergente com $a = \frac{7}{100}$ e $r = \frac{1}{10}$. Logo, sua soma é

$$S = \frac{\frac{7}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{7}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{90}$$

Assim,

$$1{,}27777777\ldots = \frac{12}{10} + \frac{7}{90} = \frac{115}{90} = \frac{23}{18},$$

ou seja, a fração geratriz da dízima $1{,}27777777\ldots$ é $\frac{23}{18}$.

Outro exemplo, $0{,}32454545454545\ldots = 0{,}32 + 0{,}0045454545\ldots$

Fixamos a atenção, primeiramente, na parte periódica $0{,}0045454545\ldots$

A soma $0{,}0045 + 0{,}000045 + 0{,}00000045 + 0{,}0000000045 + \ldots$ é uma série geométrica infinita com $a = \frac{45}{10000}$ e $r = \frac{1}{100}$, portanto, convergente. Logo, a soma desta série geométrica é

$$S = \frac{\frac{45}{10000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{45}{10000}}{\frac{99}{100}} = \frac{45}{9900} = \frac{1}{220}.$$

Assim,

$$0{,}32454545454545\ldots = \frac{32}{100} + \frac{1}{220} = \frac{357}{1100},$$

ou seja, $\frac{357}{1100}$ é a fração geratriz de $0{,}32454545454545\ldots$

O uso da soma da série geométrica para determinar a fração geratriz de uma dízima periódica simples ou composta é bastante fácil de aplicar, porém, exige que o aluno tenha conhecimento de tópicos estudados em cursos superiores, como convergência e divergência de séries e a própria série geométrica. Como o estudo de números decimais e suas representações na forma de frações surgem logo no início da vida escolar de um estudante, dificilmente ele terá domínio de tais temas para usá-lo na obtenção de uma fração geratriz. Entretanto, conteúdos que envolvem dízimas periódicas e também números decimais finitos continuam por todo o período escolar, tanto na disciplina de matemática como em outras, por exemplo, química e biologia.

Em alguns tópicos do ensino médio, os conceitos de convergência e divergência podem ser inseridos, aproveitando os motivos para o estudo da obtenção de frações geratrizes, pois podem ser apresentados quando do estudo de progressões aritméticas e geométricas. Vale ressaltar que uma série geométrica nada mais é do que a soma dos termos de uma progressão geométrica.

CONCLUSÃO

Neste capítulo, apresentamos de forma simples, sem o rigor matemático, um breve estudo sobre dízimas periódicas simples e compostas, mostrando diferentes formas de obter suas frações geratrizes. Apresentamos inclusive um novo método para o tratamento de dízimas periódicas compostas.

Existem vários métodos práticos para obtenção da fração geratriz de uma dízima. O que há de comum entre todos aqueles aqui discutidos é que, embora sejam simples e práticos, eles exigem uma análise mínima do número decimal antes de sua aplicação, ou seja, instigam a prática de raciocínio do estudante.

A representação de números decimais por frações é importante pelo fato que, às vezes, decimais finitas com várias casas decimais exigem aproximações que, se não forem feitas corretamente, podem causar perdas de valores em operações onde tais números estão envolvidos. Ao usarmos frações, não incorremos em erros de aproximação.

Embora simples, este trabalho se faz importante principalmente por instigar o estudante a colocar em prática métodos que o fazem usar operações básicas da matemática e ao mesmo tempo conhecer novos conceitos e, quem sabe, até propor seus próprios métodos para obtenção de frações geratrizes de dízimas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barbosa, M. A. R. (2010). O Pequeno Teorema de Fermat e as dízimas periódicas. Monografia, UFMG, Instituto de Ciências Exatas – Departamento de Matemática, Belo Horizonte.

Cuoco, A., Rotman, J. (2013). Learning modern algebra (Vol. 23). MAA.

Conway, J. H.; Guy, R. K. (1996). The Book of Numbers. New York: Springer-Verlag. DOI: 10.1007/978-1-4612-4072-3

Domingues, H. H. (1991). Fundamentos de aritmética. S. Paulo: Atual.

Ergene, B. C., Ergene, Ö. (2020). Repeating Decimals and Irrational Numbers on the Number Line: Through the Lens of Pre-Service and In-Service Mathematics Teachers. Acta Didactica Napocensia, 13(2), 215-232. DOI: 10.24193/adn.13.2.15

Leithold, L. (1994). Cálculo com geometria analítica. 6 ed., vol. 2, São Paulo: Harbra.

Niven, I. (1961). Numbers: rational and irrational (Vol. 1). New York: Random House.

Matos, R. N. de (2017). Uma Contribuição para o Ensino Aprendizagem dos Números Racionais: A Relação entre Dízimas Periódicas e Progressões Geométricas. Dissertação de Mestrado, UFVJM, Teófilo Otoni.

Swokowski, E. W. (1995). Cálculo com Geometria Analítica. Vol. 2, 2 ed. São Paulo: Makron Books.

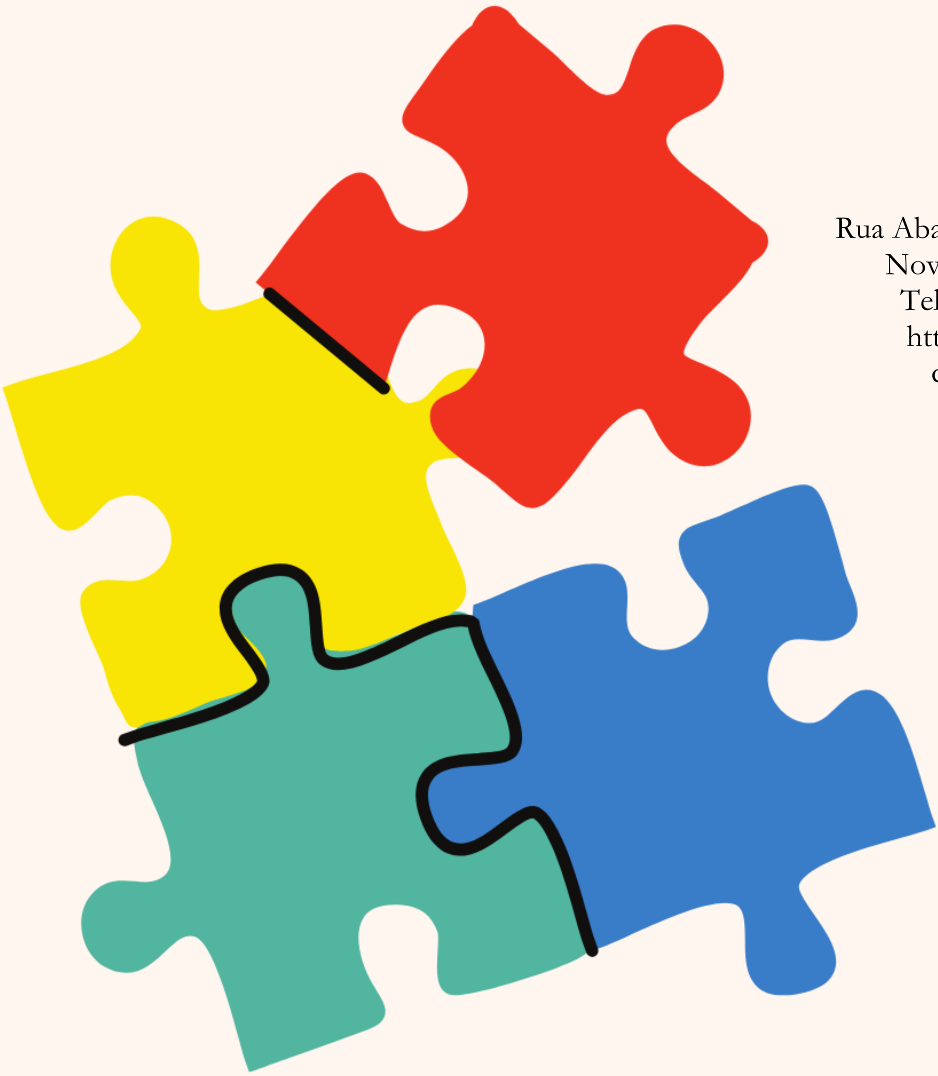
Índice remissivo

Sobre o organizador

LUCAS RODRIGUES OLIVEIRA

Mestre em Educação pela UEMS, Especialista em Literatura Brasileira. Graduado em Letras - Habilitação Português/Inglês pela UEMS. Atuou nos projetos de pesquisa: Imagens indígenas pelo "outro" na música brasileira, Ficção e História em Avante, soldados: para trás, e ENEM, Livro Didático e Legislação Educacional: A Questão da Literatura. Diretor das Escolas Municipais do Campo (2017-2018). Coordenador pedagógico do Projeto Música e Arte (2019). Atualmente é professor de Língua Portuguesa no município de Chapadão do Sul e na Secretaria de Educação Estadual de MS. Contato: lucasrodrigues_oliveira@hotmail.com.

9 786585 756013



Pantanal Editora
Rua Abaete, 83, Sala B, Centro. CEP: 78690-000
Nova Xavantina – Mato Grosso – Brasil
Telefone (66) 99682-4165 (Whatsapp)
https://www.editorapantanal.com.br
contato@editorapantanal.com.br