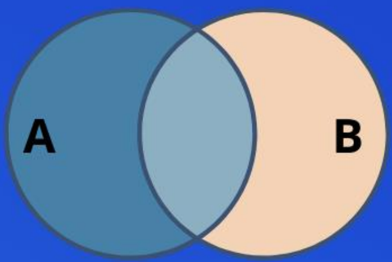
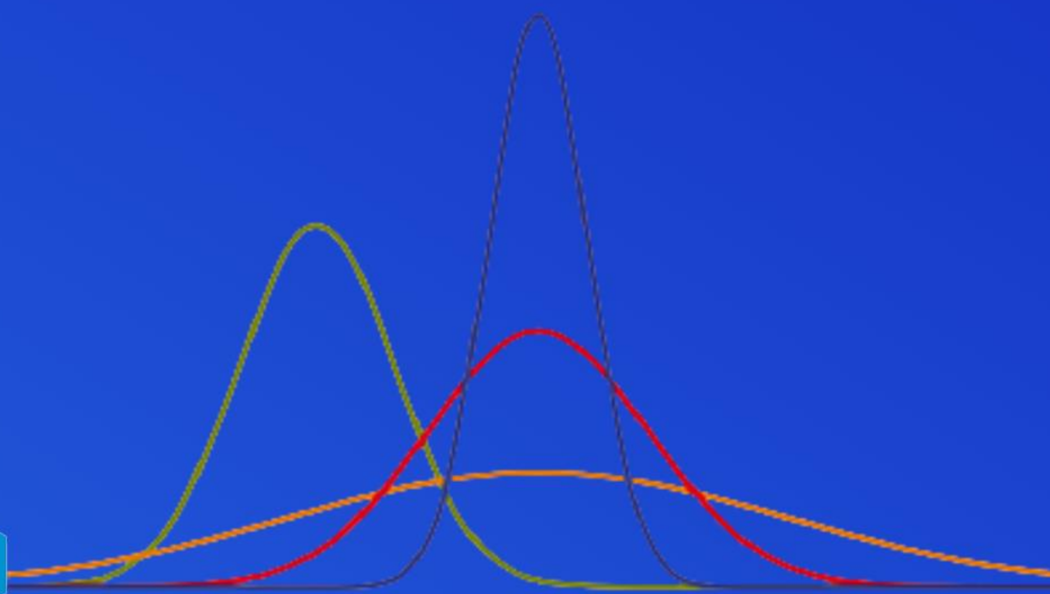
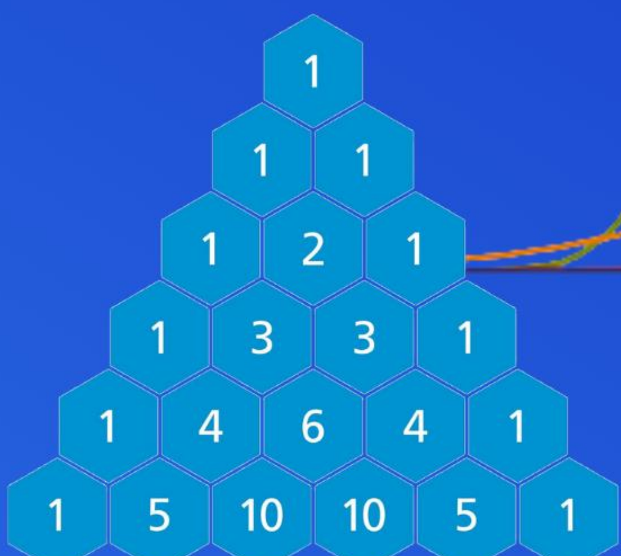
JANILSON PINHEIRO DE ASSIS
ISAAC REINALDO PINHEIRO DE LIMA
JOELMA DE ASSIS FRANÇA
ROBERTO PEQUENO DE SOUSA
ROBSON PEQUENO DE SOUSA
TELDE NATEL CUSTÓDIO
WALTER MARTINS RODRIGUES
JOAQUIM ODILON PEREIRA

ELEMENTOS DE PROBABILIDADE II







Pantanal Editora

2023

JANILSON PINHEIRO DE ASSIS
ISAAC REINALDO PINHEIRO DE LIMA
JOELMA DE ASSIS FRANÇA
ROBERTO PEQUENO DE SOUSA
ROBSON PEQUENO DE SOUSA
TELDE NATEL CUSTÓDIO
WALTER MARTINS RODRIGUES
JOAQUIM ODILON PEREIRA

ELEMENTOS DE PROBABILIDADE II

Pantanal Editora

2023

Editor Chefe: Prof. Dr. Alan Mario Zuffo
Editores Executivos: Prof. Dr. Jorge González Aguilera e Prof. Dr. Bruno Rodrigues de Oliveira

Diagramação: A editora. **Diagramação e Arte:** A editora. **Imagens de capa e contracapa:** Canva.com. **Revisão:** O(s) autor(es), organizador(es) e a editora.

Ficha Catalográfica

Catalogação na publicação
Elaborada por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

E38

Elementos de probabilidade II / Janilson Pinheiro de Assis, Isaac Reinaldo Pinheiro de Lima, Joelma de Assis França, et al. – Nova Xavantina-MT: Pantanal, 2023. 183p. ; il.

Outros autores: Roberto Pequeno de Sousa, Robson Pequeno de Sousa, Telde Natel Custódio, Walter Martins Rodrigues, Joaquim Odilon Pereira.

Livro em PDF

ISBN 978-65-81460-90-7
DOI https://doi.org/10.46420/9786581460907

1. Probabilidades. I. Assis, Janilson Pinheiro de. II. Lima, Isaac Reinaldo Pinheiro de. III. França, Joelma de Assis. IV. Título.

CDD 519.2

Índice para catálogo sistemático

I. Probabilidades

Pantanal Editora

Rua Abaete, 83, Sala B, Centro. CEP: 78690-000.
Nova Xavantina – Mato Grosso – Brasil.
Telefone (66) 99682-4165 (Whatsapp).
https://www.editorapantanal.com.br
contato@editorapantanal.com.br

PREFÁCIO

A teoria das probabilidades, suas leis, propriedades e regras, desempenha um papel fundamental em todas as áreas das ciências físicas, biológicas e sociais, e também nas atividades humanas do dia a dia, e isto faz com que ela faça parte do conteúdo programático da grande maioria dos cursos de graduação e pós-graduação, sendo amplamente ensinada na universidade, institutos, e escolas em geral. A teoria da probabilidade pode ser apresentada em vários níveis no contexto matemático, para espaços de resultados finitos e infinitos, enumeráveis ou discretos e não enumeráveis ou contínuos. A origem da probabilidade é ligada ao cálculo das possibilidades de ocorrência de determinados resultados ou acontecimentos em jogos de azar, propiciando um grande apelo intuitivo.

Este livro foi escrito com a finalidade de complementar o texto da disciplina estatística para alunos de qualquer área, especialmente voltado para estudantes de um bacharelado em Ciências Agrárias, Ciências Animais, Ecologia, Medicina, Ciências Exatas, Economia, Administração, Engenharia, Ciências Biológicas e Ciências Agrárias, além de Estudantes de Pós graduação e Técnicos ou Usuários da ferramenta Estatística..

A idéia de elaboração desse livro surgiu da experiência de mais de 30 anos lecionando a disciplina de Estatística na Graduação e Num Curto Período na Pós Graduação na Escola Superior de Agricultura de Mossoró, ESAM e atualmente Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA), Localizadas no Estado do Rio Grande Do Norte no Brasil, o qual teve origem das inúmeras Notas de Aulas, Apostilas, Anotações, Etc. elaboradas e distribuídas ao longo desse período.

Essa obra exige do leitor conhecimentos elementares de matemática, teoria dos conjuntos, aritmética, álgebra e estatística, Apesar de se procurar sempre que possível simplificar as demonstrações das propriedades, leis, regras e teoremas componentes da teoria probabilística, ou seja não utiliza formalismo matemático que vá além de noções básicas de cálculo, porém exige um conhecimento amplo dessas áreas do conhecimento humano.

No Geral Neste livro é descrito de forma minuciosa os principais modelos de distribuições teóricas ou especiais de probabilidades discretas e contínuas, dentre as quais destaca-se a distribuição normal ou gaussiana de fundamental importância para a inferência estatística. Vale salientar que em todos os modelos são apresentados a função geradora de momentos quando existir, bem como exemplos de aplicação. No final de cada capítulo apresentamos uma lista de exercícios propostos, os quais tem a finalidade de fixar no leitor os fundamentos teóricos da probabilidade mediante a resolução de exemplos nas mais diferentes situações. No final do livro existe o apêndice A e o B contendo respectivamente o alfabeto grego com todas as letras em maiúsculo e minúsculo, além de sua pronúncia em português e a tabela com os valores do número "e-λ" que é a base dos logaritmos neperianos (e = 2,1828) elevado ao valor negativo da média do intervalo contínuo da distribuição de Poisson, Que é o valor Lambda λ.

Finalmente o autor agradece antecipadamente a todos aqueles que se manifestarem, emitindo sugestões, críticas e correções, pois todas serão bem recebidas e só virão a contribuir para o aprimoramento e aperfeiçoamento dessa obra.

Peço desculpas antecipadamente pela presença de eventuais erros de qualquer natureza, pois todos são de inteira responsabilidade dos autores. Boa Leitura.

Os Autores

Mossoró-RN, Brasil, Junho de 2023

> A teoria do azar consiste em reduzir todos os acontecimentos do mesmo gênero a um certo número de casos igualmente possíveis, ou seja, tais que estejamos igualmente inseguros sobre sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao acontecimento cuja probabilidade é buscada. A razão deste número para o de todos os casos possíveis é a medida dessa probabilidade, a qual é portanto uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis.
>
> Pierre Simon Laplace (1749-1827)
>
> Astrônomo, Matemático e Físico Francês
>
> Ensaio filosófico sobre as Probabilidades.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

A origem da moderna teoria das probabilidades é atribuída a dois famosos matemáticos franceses, Blaise Pascal (1623 - 1662) e Pierre Fermat (1601 - 1665), durante o século XVII. Uma série de problemas, muitos dos quais relativos a "jogos de azar", levaram a uma troca proveitosa de correspondência entre Pascal e Fermat, na qual, os princípios fundamentais da Teoria das Probabilidades foram formulados.

Pouco tempo depois, em 1657, o holandês Christian Huygens (1629 – 1695) publicou o primeiro livro de probabilidades intitulado De Ratiociniis in Ludo Aleae. As maiores contribuições deste período devem-se a Bernoulli (1654 - 1705) e a de Moivre (1667 - 1754).

Em 1812 Pierre de Laplace (1749-1827) introduziu um conjunto de novas idéias e técnicas no seu livro Theore Analytique des Probabilites e pela primeira vez a teoria das probabilidades deixou o campo dos "jogos de azar" e foi aplicada a muitos problemas práticos e científicos. A teoria dos erros, o cálculo atuarial e a mecânica estatística são exemplos de algumas importantes aplicações da teoria das probabilidades desenvolvidas no século XIX.

Como tantos outros campos da matemática, o desenvolvimento da teoria das probabilidades tem sido estimulado pela variedade das suas aplicações. E simultaneamente, cada avanço da teoria tem permitido o alargamento da sua esfera de influência. A estatística matemática é um dos importantes ramos da teoria das probabilidades; outras aplicações ocorrem em campos tão diversos como a genética, a engenharia, a economia, a medicina, as ciências sociais, etc.

A teoria da probabilidade é o ramo da matemática que estuda os experimentos aleatórios, estocásticos ou casuais, exprimindo a chance de ocorrência de eventos aleatórios associados aos espaços amostrais desses ensaios, nas mais diferentes áreas das ciências físicas, biológicas e sociais associadas ao conhecimento humano, como por exemplo a química, a física, a biologia, a agricultura, a medicina, a genética, a atuaria, o setor de seguros, finanças e economia, astronomia, engenharia, meteorologia, a área de tecnologia, pesquisa de opinião pública, etc. Essa parte da matemática constitui a base teoria para a realização da chamada inferência estatística ou estatística indutiva ou ainda estatística analítica, haja visto que qualquer afirmação que se faça sobre a população ou universo estatístico é um raciocínio incerto, e essa incerteza é medida por um número denominado probabilidade.

A teoria de probabilidade é um importante ramo da matemática pura, que teve um começo bastante modesto. Suas raízes vêm de uma simples teoria matemática dos jogos de azar iniciada em 1654, quando o jogador De Mere propôs ao matemático Pascal suas famosas perguntas a respeito dos jogos de azar. Desde então, essa teoria percorreu um vasto caminho, inclusive o conceito passou por diversas fases. Igualmente, o campo de aplicação da teoria sofreu ampliações notáveis, como uma teoria que se ocupava com os jogos de azar passou a constituir o fundamento da inferência estatística.

Nas ciências físicas, biológicas e sociais as probabilidades existem em abundância. Sempre existiram. A enorme quantidade de citações da teoria das probabilidades e sua importância é devido a inúmeros componentes importantes não controláveis pelo pesquisador, presentes nos sistemas biológico, econômico e social onde as atividades humanas de pesquisa estão associadas. Essa ausência de controle sobre importantes variáveis de um sistema, provoca incerteza e acaso: Ocorrerá uma situação ou outra ocorrência oposta. Por isso que se o sistema possui incerteza isso implica em probabilidade. Qual a possibilidade de que ocorra um evento A ou B, o A é mais provável. A partir da probabilidade, junto com o domínio de controle parcial do ensaio, o pesquisador tem que escolher e tomar a decisão de que se forem dadas as possibilidades e consequências deste ou daquele acontecimento, como ele pesquisador deve tomar a decisão. Sem a existência dos riscos, a decisão seria uma tarefa rotineira. Neste caso, não haveria tomada de decisão, pois uma vez que, a incerteza não estando presente, prevaleceria o resultado determinístico ou o conhecimento certo, e assim forçaria com que não existisse o desafio da tomada de decisão entre escolher este ou aquele evento.

O conceito de probabilidade clássica ou a priori conforme Laplace como o quociente ou a razão do número de casos favoráveis sobre o número de casos possíveis foi à primeira definição formal de probabilidade, e apareceu pela primeira vez em forma clara na obra Líber de Ludo Aleae de Jerônimo Cardano (1501-1576). Os experimentos que repetidos sob as mesmas condições produzem resultados geralmente diferentes serão chamados experimentos aleatórios. Fenômenos aleatórios acontecem constantemente em nossa vida diária. São frequentes perguntas tais como: choverá amanhã? Qual será a temperatura máxima em Mossoró-RN no próximo domingo? Qual será o número de ganhadores da Lotofácil e da Mega Sena? Quantos habitantes terá o Mundo no ano de 2030? O índice da bolsa de valores sobe nos próximos meses, A cotação do Dólar Sobe com os Boatos do Mercado financeiro sobre a mudanças na taxa de juros, etc.

A teoria das probabilidades é o ramo da matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios, com o objetivo de extrapolar para populações, resultados obtidos em amostras aleatórias representativas destes universos estudados na pesquisa científica em geral.

O modelo matemático utilizado para estudar um fenômeno aleatório particular varia em sua complexidade matemática, dependendo do fenômeno estudado. Mas todos esses modelos têm ingredientes básicos comuns. É interessante destacar uma referência a alguns dos mais famosos cientistas que tanto contribuíram para a teoria das probabilidades desde Laplace: são eles Chebyshev, Markov e Kolmogorov. O que mostraremos nesse livro são as propriedades e leis em geral, com o objetivo de estudar uma série de fenômenos aleatórios relativamente simples e algumas vezes complexos de ideias e noções que são bastante gerais.

Os Autores

Mossoró-RN, Brasil, Junho de 2023

DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS OU ESPECIAIS DE PROBABILIDADE

Introdução

Como ponto inicial deste assunto tão importante tem-se a definição que afirma sobre o objetivo de uma distribuição teórica ou especial de probabilidade. O conceito é aquele de que ela é uma forma matemática abstrata, ou de formato característico, definidos por valores de parâmetros de Localização, de Variabilidade e de forma, que serve para modelar o comportamento de milhares de variáveis aleatórias discretas, continuas ou mistas, que ocorrem na natureza e nas pesquisas de uma forma geral, podendo muitas vezes ser o assunto principal na grande maioria das vezes como na hidrologia e na meteorologia, além de outras áreas. Existem dezenas de modelos mas apenas um pequeno número deles tem um aspecto de aplicação geral. Algumas destas formas matemáticas aparecem naturalmente como uma consequência de determinadas espécies de processos que geram os dados de respostas ou variáveis, e quando aplicáveis, estes são especialmente candidatos plausíveis para representar concisamente variações em um conjunto de dados. Mesmo quando não existe nenhuma base natural forte por trás da escolha de uma distribuição teórica particular, pode-se encontrar empiricamente que a esse modelo de distribuição representa um conjunto de dados muito bem.

A natureza específica de uma família de distribuição teórica é determinada por valores particulares para entidades denominadas parâmetros da distribuição. Distribuições teóricas são também chamadas distribuições paramétricas, porque seus atributos específicos dependem dos valores numéricos de seus parâmetros. Por exemplo, uma distribuição normal ou Gaussiana tem como característica o formato de sino de igreja, campanular ou chapéu de Napoleão. Contudo, dizer-se que a temperatura média de Janeiro em uma certa localidade está bem representada por uma distribuição Gaussiana não é muito informativo sobre a natureza do dado, sem especificar qual a distribuição Gaussiana representa os dados. Existe, de fato, uma infinidade de exemplos particulares de distribuições Gaussianas correspondendo a todos possíveis valores dos dois parâmetros que a definem, μ e σ. Mas sabendo-se, por exemplo, que as temperaturas mensais para Janeiro estão bem representadas por uma distribuição Gaussiana com μ = 23.0 ºC e σ=2.5ºC permite conhecer, na realidade, uma grande quantidade de informações a respeito da natureza e magnitudes das variações da temperatura de Janeiro em uma dada localidade.

Essas distribuições são modelos matemáticos de distribuições de probabilidades de certos universos ou populações, os quais são obtidos partindo-se de certas hipóteses gerais e deduzidos matematicamente. Para se estabelecer o modelo, é necessário determinadas hipóteses ou pressuposições bem gerias e o conjunto de espaço amostral de resultados ou de valores respostas da variável aleatória sob estudo ou investigação.

Estes modelos, apesar de existirem em dezenas de unidades, eles constituem a base para boa parte da teoria estatística, usada pelos pesquisadores em geral em estudos de inferência estatística.

O conhecimento destas distribuições tem importantes consequências práticas, isto porque existem diferentes métodos de análise para os dados de observação ou variável aleatória que seguem ou podem ter suas distribuições de frequências na natureza e na pesquisa em geral, modelados, aderidos ou ajustados em diferentes distribuições teóricas ou especiais de probabilidades.

Tipos

As distribuições de probabilidades podem ser discretas ou descontínuas, contínuas ou mistas, conforme a variável aleatória sob estudo seja discreta ou descontínua, ainda contínua ou mista respectivamente.

Distribuições teóricas discretas ou descontínuas:

- Uniforme;
- Bernoulli;
- Binomial;
- Poisson;
- Geométrica ou Pascal;
- Hipergeométrica;
- Polinomial ou Multinomial;
- Binomial Negativa,

dentre outras.

Distribuições teóricas contínuas:

- Uniforme;
- Normal;
- Triangular;
- Beta;
- Gama;
- Gauchy;
- Weilbul;
- Pareto;
- Qui-quadrado;
- t de "Student";
- F de Snedecor-Fisher,

além de outros modelos.

Parametrização das distribuições

As variáveis aleatórias, os valores ou respostas dos ensaios obtidos nas pesquisas de uma forma geral, associadas a grande parte das experiências cientificas nas mais diferentes áreas da atividade humana, podem ser representadas ou modeladas por famílias de distribuições estatísticas, que são modelos matemáticos abstratos, e cujas propriedades como por exemplo a média, a variância e a forma geométrica são função de poucos parâmetros, apesar de muitas delas terem vários parâmetros característicos. Embora exista uma diversidade infinita de famílias de distribuições estatísticas, o seu interesse é bastante variado e apenas um número limitado de modelos tem um campo de aplicação generalizado.

Uma família de distribuições especiais de probabilidade é uma distribuição que depende de um ou mais parâmetros. Estes parâmetros são classificados com base na sua interpretação geométrica ou física, e determinam a localização, a variabilidade ou dispersão e a forma da distribuição através da sua assimetria, achatamento ou curtose ou de sua forma geométrica, e pertencem a um dos seguintes tipos.

i) Parâmetro de Localização

Especifica um ponto de localização de uma gama de valores da distribuição, usualmente o ponto médio ou o ponto inferior do campo(gama) de valores. Variando este parâmetro apenas se desloca a distribuição ao longo do eixo da das abcissas.

ii) Parâmetro de Escala

Determina a dispersão da distribuição e, consequentemente, as unidades (escala) de medida. E faz com que a distribuição se comprima ou se expanda sem alterar a sua forma básica.

iii) Parâmetro de Forma

Estabelece a forma básica da distribuição e tem um peso determinante em algumas das propriedades da distribuição (como por exemplo, a assimetria).

Uma determinada distribuição pode não ter nenhum parâmetro de forma ou possuir vários parâmetros de forma.

MODELOS DE DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE TEÓRICAS DISCRETAS (DESCONTÍNUAS)

DISTRIBUIÇÃO UNIFORME: DISTRIBUIÇÃO UNIFORME DISCRETA EM n PONTOS- $DU(i,j)$

Introdução

Este é o caso mais simples de distribuição discreta, no qual cada possível valor da variável aleatória ocorre com a mesma probabilidade.

Função de probabilidade

A variável aleatória, X, diz-se que tem distribuição Uniforme discreta em, n, pontos quando tem função probabilidade,

$$f(x_i) = P(X = x_i) = \frac{1}{n}, i = 1,2, \dots, n; \text{ ou ainda,}$$

A variável aleatória X, com distribuição uniforme discreta, com os k valores de seu domínio dados por $x_1, x_2, \dots, x_k$, tem função de probabilidade definida pela equação abaixo.

$$P(X = x_1) = P(x_1) = f(x_i) = \frac{1}{k}, \text{para } i = 1,2, \dots, k$$

Uma variável aleatória discreta X assumindo os valores $x_1, x_2, \dots, x_k$, terá distribuição uniforme discreta se todos os elementos forem equiprováveis.

Medidas características

Para esta distribuição tem-se que o momento de ordem k é dado por,

$$E\{X^k\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

É fácil verificar que a média e a variância são dadas por:

i) $E(X) = \mu_x = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$

ii) $Var(\mathrm{X}) = \sigma_x^2 = \frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2}{k}\right]$

O caso mais importante é aquele em que a variável aleatória assume valores num reticulado, $x_i = i, i = 1,2, \dots, k$, sendo, por exemplo, o modelo que descreve o lançamento de um dado perfeito ($n =$

6) ou a obtenção por acaso de um dígito ($i = 0, 1, \ldots, 9$), procedimento extremamente importante na construção de tabelas de números aleatórios. Para esse caso, tem-se,

$$E\{X^2\} = \frac{(k+1)(2k+1)}{6}$$

Ou melhor se os valores de x_i são iguais a $1, 2, \ldots, k$, então,

$$E(X) = \mu_x = \frac{k+1}{2} \text{ e}$$

$$Var(\mathrm{X}) = \sigma_x^2 = \frac{k^2 - 1}{12}$$

Função de probabilidade acumulada

A função de probabilidade acumulada ou função de distribuição é dada por:

$$F(X) = P(X \leq x_i) = F(x) = \sum_{x_i \leq x} \frac{1}{k}$$

Ou melhor a correspondente função de distribuição assume a forma,

$$F(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(X - X_i)$$

onde, como habitualmente,

$$E(x) = 0, x < 0,$$

$$E(x) = 1, x \geq 0$$

Gráfico

Na Figura 1 a seguir, representa-se um exemplo da função de probabilidade da distribuição uniforme discreta de uma variável X que pode assumir 4 valores.

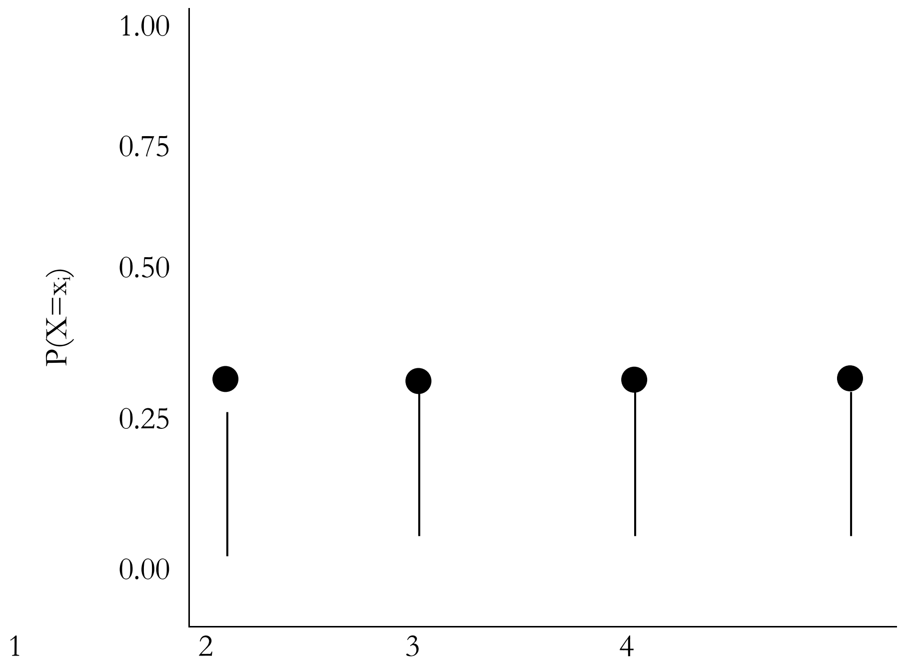


Figura 1. Gráfico representativo da função de probabilidade da distribuição de probabilidade uniforme discreta com $k = 4$.

Função geradora de momentos

A função geradora de momentos é definida para todo o "s".

$$\mathrm{M(s)} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e^{sx_i}$$

O caso mais importante como já foi dito é aquele em que a variável aleatória assume valores num reticulado, $x_i = i, i = 1,2, \dots, n$, sendo, por exemplo, o modelo que descreve o lançamento de um dado perfeito ($n = 6$) ou a obtenção por acaso de um dígito ($i = 0, 1, \dots, 9$), procedimento extremamente importante na construção de tabelas de números aleatórios. Para esse caso, tem-se,

$$M(s) = \frac{e^s(k - e^{sk})}{(1 - e^s)}$$

DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI-BERNOULLI(p)

Introdução

Muitos experimentos são tais que os resultados possíveis apresentam ou não uma determinada característica, normalmente de natureza qualitativa.

- Uma moeda é lançada: o resultado ou é "cara" ou não é.
- Uma peça é escolhida, ao acaso, de um lote, contendo 500 peças; esta peça é defeituosa ou não defeituosa.
- Um parto é realizado numa matriz bovina, o bezerro ´macho ou é fêmea.

Em todos os casos, estamos interessados na ocorrência de um sucesso (ocorrência de cara, peça defeituosa, bezerro macho, etc.).

Para cada experimento acima, podemos definir uma variável X que assume apenas dois valores: o valor 1, se ocorre sucesso e o valor 0, se ocorre fracasso indicamos p a probabilidade de sucesso, $p(sucesso) = p(s) = p$, onde $0 < p < 1$.

Ensaios que resultam numa variável aleatória que assume apenas dois valores: sucesso $[X = 1]$ e fracasso $[X = 0]$, cujas probabilidades são respectivamente p e $1 - p = q$ sendo que $p + q = 1$ são denominados ensaios de Bernoulli.

Dessa forma experimentos que resultam numa variável aleatória de Bernoulli são chamados ensaios de Bernoulli.

Notação

$X \frown Ber(p)$: Indica que a variável aleatória x possui distribuição de bernoulli com parâmetro p.

Função de probabilidade

$$P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x} \text{ para } x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Gráfico da distribuição de probabilidade Bernoulli

O gráfico da distribuição Bernoulli é um gráfico em escada ou bastão devido ao caráter discreto dessa variável, como mostra a figura 2 abaixo.

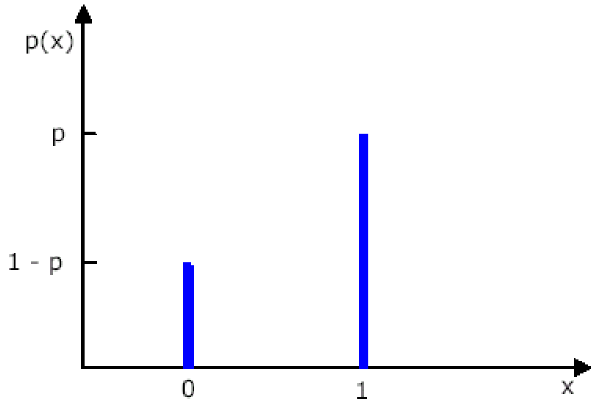


Figura 2. Gráfico representativo da distribuição de probabilidade de Bernoulli.

Gráfico da distribuição de probabilidade acumulada ou função de repartição ou função de distribuição da variável aleatória Binomial $[\boldsymbol{F(x)}]$

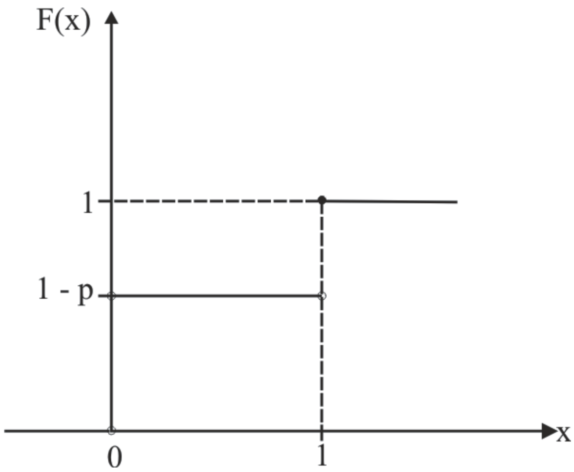


Figura 3. Distribuição de probabilidade acumulada de Bernoulli.

Notação:

$X \cap Ber\ (p)$: significa que a variável aleatória X possui distribuição de Bernoulli com parâmetro p.

Função de probabilidade da variável aleatória de Bernoulli

Tabela 1. Distribuição de probabilidade de Bernoulli.

X	0	1	Total
$P(X=x_i)$	$1 - p$	p	1

Função de Distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se x } < 0 \\ 1 - \text{p, se o} \leq x < 1 \\ 1, & \text{se x} \geq 1 \end{cases}$$

Medidas características

i) $E(x) = \mu_x = p$

ii) $\sigma_x^2 = Var(x) = P(1-p) = pq$

Função geradora de momentos

$$m_x(t) = q + Pe^t$$

EXERCÍCIOS

Exercício 1: Seja $x = 1$ a ocorrência de uma fêmea em um nascimento de um bovino e $x = 0$ a ocorrência de macho. Determine a distribuição de probabilidade de x.

Gametas ♀	Gametas ♂	
	1/2 X	1/2 Y
X	$\frac{1}{2}$ XX (♀)	$\frac{1}{2}$ XY (♂)

As fêmeas (XX) ocorrerão em 50% das vezes. Logo, a variável X é uma variável aleatória de Bernoulli com parâmetro P $= \frac{1}{2}$.

Exercício 2: Vamos supor o lançamento de um dado onde verificamos ou não a ocorrência de fase 5. Supondo o dado perfeito, teremos.

Tabela 2. Distribuição de probabilidade da variável aleatória discreta X. Ocorrência da face número 5 no lançamento de um dado honesto.

X	0	1	Total
P(x)	5/6	1/6	1

Onde a média ou esperança matemática do número de face 5 é dada, por: $E(X) = \frac{1}{6}$ e a variância é dada por: $Var(X) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL OU SEQUÊNCIA DE BERNOULLI-$Bin(n, p)$

Generalidades

Esse modelo foi criado e deduzido em fins do século XVII pelo matemático Suíço Jacob Jacques Bernoulli (1654-1705).

É a mais importante das distribuições teóricas para variáveis aleatórias discretas, e foi a primeira distribuição introduzida na estatística. podemos afirmar que a distribuição Binomial está para as distribuições discretas assim como a distribuição Normal está para as contínuas. Esta distribuição é muito aplicada em amostragem e em situações em que conhecemos o tamanho da amostras e sabemos quantas vezes é que um acontecimento ou evento ocorreu.

Imagine agora que repetimos um ensaio de Bernoulli n vezes, ou, como se diz também, obtemos uma amostra de tamanho n de uma distribuição de Bernoulli. Suponha ainda que as repetições sejam independentes e, o resultado de um ensaio não tem influência nenhuma no resultado de qualquer outro ensaio. Uma amostra particular será constituída de uma sequência de sucessos e fracassos ou se quisermos de uns e zeros.

Características de uma experiência binomial

a) Para cada ensaio, a variável aleatória pode assumir somente um dos dois valores sucessivo ($X = 1$) ou fracasso ($X = 0$).
b) Os ensaios repetidos são independentes.
c) O valor de "P" que é a probabilidade de sucesso permanece constante de ensaio para ensaio.
d) Um número fixo de ensaios (n) serão conduzidos.
e) Interessa-nos X, número de sucessos obtidos em "n" tentativas.

Função de probabilidade $[P(x)]$

a) Seja P a probabilidade de ocorrência (sucesso) e $q = 1 - p$, a de não ocorrência (fracasso), evidentemente $p + q = 1$.

b) Admitimos que em n provas independentes (repetições) há x sucessos.

c) A probabilidade de se obter x sucessos nas n provas é dada por:

$\underbrace{\text{P.P.P.....P}}_{X} \cdot \underbrace{\text{q.q......q}}_{n-x} = P^{x} \cdot \text{q}^{n-x}$, devido a independência dos ensaios. Mas qualquer sequência com x sucessos e n – x fracassos terá a mesma probabilidade. Multiplicando esta probabilidade pelo número de maneiras distintas de se conseguir X sucesso em n tentativas que é $\binom{n}{X}$, obtém-se o resultado pretendido. Portanto, resta saber quantas sequências com x sucessos e $n - x$ fracassos podemos formar.

É fácil ver que, considerando todas as n–uplas com x sucessos ou melhor como nada foi dito sobre a ordem dos sucessos, a probabilidade será obtida multiplicando-se o resultado acima por $C(n,x) = \binom{n}{x}$; e a função de probabilidade apropriada é:

$$\text{P}(\text{X} = \text{x}_i) = \binom{n}{x} P^{x}\text{q}^{n-x} = \frac{n!}{\text{X}!\,(n-x)!}\,\text{P}^{x}\text{q}^{n-x},$$

que é o termo geral do desenvolvimento do Binômio,

$$(\text{p} + \text{q})^{n} = \sum_{x=0}^{n} \frac{n}{\text{X}!(n-x)!} P^{x} q^{n-x}$$

é claro que $(p+q)^{n} = \sum_{x=0}^{\infty} P(x) = 1$,

Os termos de $P(x)$ dão as probabilidades dos vários resultados possíveis. Assim,

$$P(X = 0) = P(0) = q^{n}$$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X \geq 1) = 1 - [P(x = 0)]$$

$$P(X = n) = P^{n}$$

Fórmula de recorrência da distribuição binomial

$$P(X+1) = \frac{P(n-X)}{q(X+1)} P(X)$$

Distribuição de probabilidade acumulada (função de repartição) binomial[F(x)]

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} C_{x}^{n} P^{x} q^{n-x}$$

Notação:

$X \sim Bin(n;p)$: Significa que a variável X tem distribuição binomial com parâmetros n e p e indicaremos pela notação $X\colon B\,(n;\,p)$ ou $X \cap B\,(n;\,p)$ ou então a notação acima.

Gráfico representativo da distribuição de probabilidades

O gráfico (Figura 4) varia conforme os valores dos parâmetros n e p, sendo assim para $n = 5$ e $p = 0{,}10$ temos o seguinte gráfico.

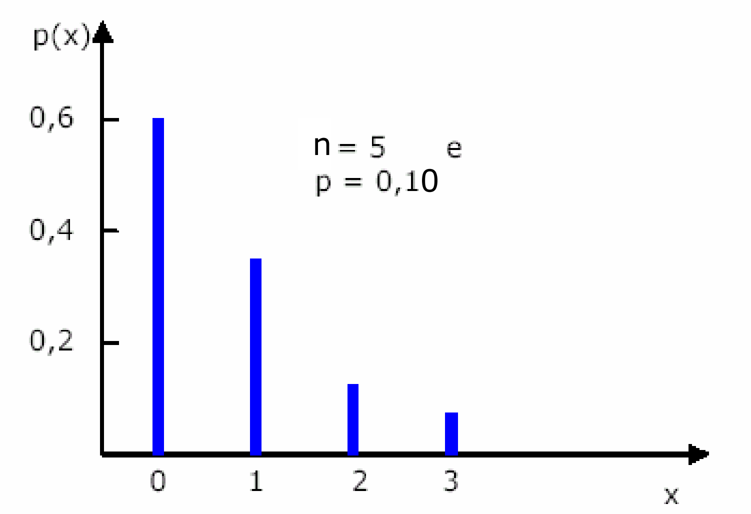


Figura 4. Gráfico representativo da distribuição de probabilidade Binomial, para $n = 5$ e $p = 0{,}10$.

Gráfico da distribuição de probabilidade acumulada ou função de repartição ou função de distribuição da variável aleatória Binomial. O gráfico típico dessa distribuição é um gráfico em escada como mostra a Figura 5, abaixo.

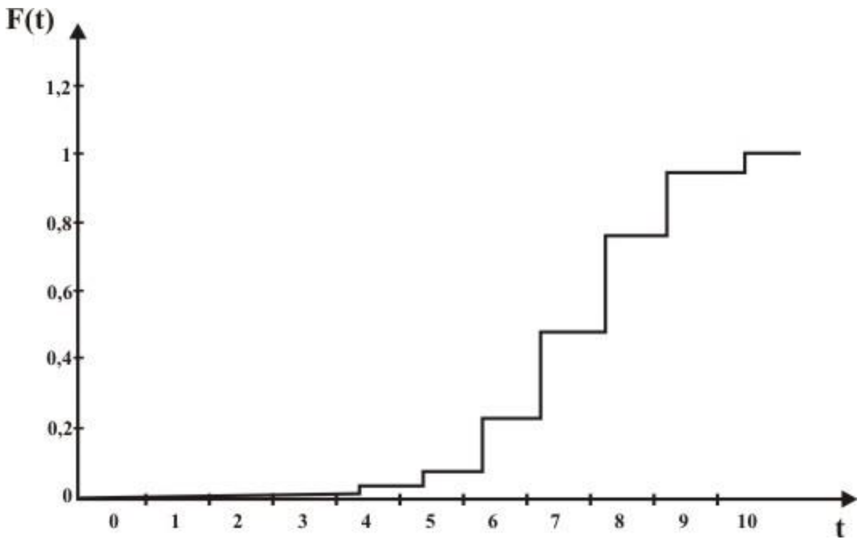


Figura 5. Gráfico representativo da distribuição de probabilidade acumulada da variável aleatória Binomial.

Situações reais que envolvem variáveis aleatórias discretas ou descontínuas nas quais pode ser aplicado o modelo matemático da distribuição binomial:

Exemplos:

1. Lançamentos sucessivos de uma moeda e observar a sequência de cara ou coroa.
2. Número de pessoas com determinada doença.
3. Número de produtos manufaturados que são defeituosos
4. Número de folhas de uma planta afetada por certa doença.
5. Número de animais curados com certo medicamento.
6. Número de sementes germinadas.
7. etc.

Medidas (Parâmetros) características da distribuição binomial

i) Média:

$$\mu = E(x) = m = \sum_{x=0}^{n} x\,P(x) = E\,(y_1 + y_2 + \ldots. + y_n) = p + p + \cdots + p = np$$

ou ainda, pela definição do valor esperado de X, tem-se que:

$$E(x) = \mu_1 = \sum_{x=0}^{n} XP(X=x) = \sum_{x=0}^{n} x\frac{n!}{x!\,(n-x)!}p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} x\frac{n}{x}\frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!}pp^{x-1}q^{n-x}$$

$$= np\sum_{x=0}^{n}\frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!}p^{x-1}q^{n-x}$$

fazendo-se $n - 1 = m$ e $x - 1 = Y$, tem-se para $X = 1$, $Y = 0$; para $X = n$, $Y = n - 1 = m$ e $n - X = m - Y$. Logo temas que:

$$E\,(\mathrm{x}) = \mu_1 = np\sum_{Y=0}^{m}\frac{m!}{Y!\,(m-Y)!}p^Y q^{m-Y} = np(p+q)^m$$

Como $q = 1 - P$, e $P + q = 1$. Assim,

$$E(X) = np$$

ii) Variância:

$$VAR(x) = \sigma^2 = \sum_{x=0}^{n}(X_i - \mu)^2 P(x) = VAR\,(y_1 + y_2 + \ldots. + y_n) = pq + pq + \ldots. + pq$$

$$= npq$$

Ou ainda temos que:

$$V(X) = \mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = E(X) - n^2p^2 = \sum_{x=0}^{n} X^2 \frac{n!}{X!(n-X)!} P^X q^{n-X} - n^2P^2$$

Através da mesma metodologia utilizada na determinação de $E(X)$, obtém-se:

$$\mu_2' = E(X^2) = n^2p^2 - np^2 + np$$

Logo temos que:

$$V(X) = \mu_2' - n^2p^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) \text{ ou } V(X) = npq$$

iii) Desvio Padrão

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\mathrm{n\,.\,p\,.\,q}}$$

iv) Moda:

A distribuição é unimodal se $(n+1)p$ não é um número inteiro. Neste caso, a moda é dada por $Int[(n+1)p]$, ou seja, a parte inteira de $(n+1)p$.

A distribuição é bimodal se $(n+1)p$ é um número inteiro. Neste caso, as modas são $(n+1)p$ e $(n+1)p-1$. A justificativa baseia-se em resolver as desigualdades $P(X = x) \geq P(X = x-1)$ e $P(X = x) \geq P(X = x+1)$ em relação a x.

v) Coeficiente de assimetria (a_3)

Sendo $a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$ e como

$$\mu_2 = \mathrm{npq}$$

$$e\ \mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2(\mu_1')^3 = 2np^3 - 3np^2 + np = npq(q-p)$$

Assim temos que:

$$a_3 = \frac{npq(q-p)}{npq\sqrt{npq}} = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$$

Ou seja, X terá distribuição simétrica quando $q = p = \frac{1}{2}$; distribuição assimpetrica negativa quando $q < p$ e distribuição asimétrica positiva quando $q > p$.

Função geradora de momentos

$$m_x(t) = (q = pe^t)^n$$

Exercícios

1) Numa criação de coelhos, 40% são machos. Qual a probabilidade de que nasçam pelo menos 2 coelhos machos num dia que nascerem 20 coelhos?

X: Número de coelhos machos (C.M.)

$$X = 0,1,\ldots,20 \rightarrow P = P(C.M.) = 040 \Rightarrow X{:}\ B\ (20;\ 0{,}40)$$

i) $P\ (x \geq 2) = 1 - P\ (x < 2) = 1 - \{P\ (X = 0) + P(x = 1)\}$

$$\text{P}\ (\text{x} \geq 2) = 1 - \left\{\binom{20}{0}\ (0{,}40)^0\ (0{,}60)^{20} + \binom{20}{1}(0{,}40)^1\ (0{,}60)^{19}\right\}$$

$$P\ (x \geq 2) = 1 - (0{,}00003656 + 0{,}00049)$$

$$P(X \geq 2) = 0{,}99948 = 99{,}948\%$$

ii) $P(x = 3 \text{ machos}) = \binom{20}{3}(0{,}40)^3(0{,}60)^{20-3}$

$$\text{P}\ (\text{x} = 3\ \text{cm}) = \frac{20!}{3!\,(20-3)!}(0{,}40)^3(0{,}60)^{17} = \frac{20{\cdot}19{\cdot}18{\cdot}17!}{3\cdot 2{\cdot}\ 1{\cdot}\ 17!}0{,}064\cdot 0{,}0001693$$

$$P\ (x = 3\ \text{cm}) = 1140.0{,}0000108352 = 0{,}01235 = 1{,}235\%$$

iii) Qual o número médio ou valor esperado de coelhos machos nessa amostra?

$$E(x) = 20\cdot 0{,}40 = 8 \text{ coelhos machos}$$

2) A probabilidade de ocorrer nascimentos de bezerros natimortos em partos de um rebanho bovino da raça nelore é conhecido como sendo $P = 10\%$.

i) Qual a probabilidade de ocorrerem, por acaso, 3 natimortos em 5 partos observados?

$P = 0{,}10$ $\qquad$ $\text{P}\ (\text{x} = 3) = \text{C}_3^5.(0{,}10)^3(0{,}90)^{5-3}$

$q = 0{,}90$ $\qquad$ $\text{P}\ (\text{x} = 3) = \frac{5!}{3!\ (5\text{ - }3)!}(0{,}10)^3(0{,}90)^2$

$n = 5$

$k = 3$

$x =$ nº de natimortos $P\ (x = 3) = 10\,.\,0{,}001\,.\,0{,}81 = 0{,}0081 = 0{,}81\%$

$x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$x{:}\ B\ (5;\ 0{,}10)$

ii) Qual a probabilidade de ocorrer pelo menos um natimorto nos 5 partos observados?

$$P(x \geq 1) = 1 - [P(x = 0)] = 1 - C_0^5\,(0{,}10)^0 \,.\, (0{,}90)^{5-0} = 1 - 0{,}59049 = 0{,}40951 \cong 40{,}95\%$$

iii) Em $n = 50$ partos observados, qual o número médio esperado de natimortos?

$$E(x) = \mu_x = 50 \cdot 0{,}10 = 5 \text{ natimortos}$$

iv) E em $n = 2000$ nascimentos, qual é o número médio esperado?

$$E(x) = 2000 \cdot 0{,}10 = 200 \text{ natimortos}$$

v) Qual o desvio padrão em (c)?

$$\begin{cases} P = 0{,}10 \\ q = 0{,}90 \end{cases}$$

$$\sigma_x = \sqrt{50 \text{ x } 0{,}10 \text{ x } 0{,}90} = 2{,}12 \text{ natimortos}$$

vi) Qual o número médio de partos com natimortos?

$$E(x) = 5 \cdot 0{,}10 = 0{,}5 \text{ parto}$$

3) Considere uma anomalia metabólica que atinge aproximadamente 1 em cada 100 bezerros da raça Canchim. Se 4 animais nascem em um hospital veterinário em Mossoró, Rn, em certo dia do mês de Janeiro de 2008, qual é a probabilidade de:

i) Nenhum apresentar esse problema?

ii) Não mais de um apresentar esse problema?

X: número de bezerros com anomalia metabólica

$n = 4$

$X = \{0,1,2,3,4\}$

$P = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$

$q = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$

i) $P(x = 0) = C_0^4 \,.\, (0{,}01)^0 \,.\, (0{,}99)^{4-0} = \dfrac{4!}{0!\,(4-0)} \,.\, (0{,}99)^4 = (0{,}99)^4$

$$P\,(x = 0) = 0{,}960596 = 96{,}0596\%$$

ii) $P(x \leq 1) = P(x = 0) + P(x = 1) = 0{,}960596 + C_1^4(0{,}01)^1(0{,}99)^{4-1}$

$$P(x \leq 1) = 0{,}960596 + \frac{4!}{11\ (4-1)!} 0{,}01\ (0{,}99)^3$$

$$P(x \leq 1) = 0{,}960596 + \frac{4!\,3!}{3!}\ 0{,}01 \cdot 0{,}970299$$

$$P(x \leq 1) = 0{,}960596 + 0{,}0388119 = 0{,}9994079 = 99{,}94\%$$

$$P(x \leq 1) = 0{,}9941 = 99{,}41\%$$

iii) Qual é o número médio ou valor esperado de bezerros com a anomalia metabólica?

$$E(x) = \mu(x) = 4P(X) = 4 \cdot 0{,}01 = 0{,}04 \text{ bezerros}$$

iv) Em 1000 partos observamos, qual é o número de bezerros com a anomalia metabólica?

$$E(x) = 1000P(x) = 1000 \cdot 0{,}01 = 10 \text{ bezerros}$$

4) Uma moeda é lançada três vezes; qual a probabilidade de se obter duas caras

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2}, \mathrm{q} = \frac{1}{2}, \mathrm{n} = 3\mathrm{P}(\mathrm{x} = 2) = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = \frac{3!}{2!\ 1!} \cdot (0{,}5)^2(0{,}5)^1 = 0{,}375$$

5) Um dado é lançado cinco vezes; qual é a probabilidade de se obter face 5 no máximo três vezes?

$$P(x \leq 3) = P(x = 0) + P(x = 1) = P(x = 2) + P(x = 3)$$

$n = 5$

$P(faces) = \dfrac{1}{6}$

$q\ (não\ ocorre\ face\ 5) = \dfrac{5}{6}$

TABELAS DA DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE BINOMIAL

Tabela 3. Tabelas da Distribuição de probabilidade Binomial. Probabilidades binomiais $P(X = x|n, p)$ para valores $n = 1,2,\ldots,20;\ p = 0,05;\ 0,1;\ \ldots;\ 0,95;\ X = 0,1,\ldots,n$.

$n = 1$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0	0,9500	0,9000	0,8000	0,7000	0,6000	0,5000	0,4000	0,3000	0,2000	0,1000	0,0500
1	0,0500	0,1000	0,2000	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	0,9500

$n = 2$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0	0,9025	0,8100	0,6400	0,4900	0,3600	0,2500	0,1600	0,0900	0,0400	0,0100	0,0025
1	0,0950	0,1800	0,3200	0,4200	0,4800	0,5000	0,4800	0,4200	0,3200	0,1800	0,0950
2	0,0025	0,0100	0,0400	0,0900	0,1600	0,2500	0,3600	0,4900	0,6400	0,8100	0,9025

$n = 3$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0	0,8574	0,7290	0,5120	0,3430	0,2160	0,1250	0,0640	0,0270	0,0080	0,0010	0,0001
1	0,1354	0,2430	0,3840	0,4410	0,4320	0,3750	0,2880	0,1890	0,0960	0,0270	0,0071
2	0,0071	0,0270	0,0960	0,1890	0,2880	0,3750	0,4320	0,4410	0,3840	0,2430	0,1354
3	0,0001	0,0010	0,0080	0,0270	0,0640	0,1250	0,2160	0,3430	0,5120	0,7290	0,8574

$n = 4$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0	0,8145	0,6561	0,4096	0,2401	0,1296	0,0625	0,0256	0,0081	0,0016	0,0001	0,0000
1	0,1715	0,2916	0,4096	0,4116	0,3456	0,2500	0,1536	0,0756	0,0256	0,0036	0,0005
2	0,0135	0,0486	0,1536	0,2646	0,3456	0,3750	0,3456	0,2646	0,1536	0,0486	0,0135
3	0,0005	0,0036	0,0256	0,0756	0,1536	0,2500	0,3456	0,4116	0,4096	0,2916	0,1715
4	0,0000	0,0001	0,0016	0,0081	0,0256	0,0625	0,1296	0,2401	0,4096	0,6561	0,8145

$n = 5$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0	0,7738	0,5905	0,3277	0,1681	0,0778	0,0313	0,0102	0,0024	0,0003	0,0000	0,0000
1	0,2036	0,3281	0,4096	0,3602	0,2592	0,1563	0,0768	0,0284	0,0064	0,0005	0,0000
2	0,0214	0,0729	0,2048	0,3087	0,3456	0,3125	0,2304	0,1323	0,0512	0,0081	0,0011
3	0,0011	0,0081	0,0512	0,1323	0,2304	0,3125	0,3456	0,3087	0,2048	0,0729	0,0214
4	0,0000	0,0005	0,0064	0,0284	0,0768	0,1563	0,2592	0,3602	0,4096	0,3281	0,2036
5	0,0000	0,0000	0,0003	0,0024	0,0102	0,0313	0,0778	0,1681	0,3277	0,5905	0,7738

$n = 6$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0	0,7351	0,5314	0,2621	0,1176	0,0467	0,0156	0,0041	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000
1	0,2321	0,3543	0,3932	0,3025	0,1866	0,0938	0,0369	0,0102	0,0015	0,0001	0,0000
2	0,0305	0,0984	0,2458	0,3241	0,3110	0,2344	0,1382	0,0595	0,0154	0,0012	0,0001
3	0,0021	0,0146	0,0819	0,1852	0,2765	0,3125	0,2765	0,1852	0,0819	0,0146	0,0021
4	0,0001	0,0012	0,0154	0,0595	0,1382	0,2344	0,3110	0,3241	0,2458	0,0984	0,0305
5	0,0000	0,0001	0,0015	0,0102	0,0369	0,0938	0,1866	0,3025	0,3932	0,3543	0,2321
6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0041	0,0156	0,0467	0,1176	0,2621	0,5314	0,7351

$n = 7$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0	0,6983	0,4783	0,2097	0,0824	0,0280	0,0078	0,0016	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,2573	0,3720	0,3670	0,2471	0,1306	0,0547	0,0172	0,0036	0,0004	0,0000	0,0000
2	0,0406	0,1240	0,2753	0,3177	0,2613	0,1641	0,0774	0,0250	0,0043	0,0002	0,0000
3	0,0036	0,0230	0,1147	0,2269	0,2903	0,2734	0,1935	0,0972	0,0287	0,0026	0,0002
4	0,0002	0,0026	0,0287	0,0972	0,1935	0,2734	0,2903	0,2269	0,1147	0,0230	0,0036

Continuação da Tabela 3

$n = 7$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
5	0,0000	0,0002	0,0043	0,0250	0,0774	0,1641	0,2613	0,3177	0,2753	0,1240	0,0406
6	0,0000	0,0000	0,0004	0,0036	0,0172	0,0547	0,1306	0,2471	0,3670	0,3720	0,2573
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0016	0,0078	0,0280	0,0824	0,2097	0,4783	0,6983

$n = 8$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0	0,6634	0,4305	0,1678	0,0576	0,0168	0,0039	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,2793	0,3826	0,3355	0,1977	0,0896	0,0313	0,0079	0,0012	0,0001	0,0000	0,0000
2	0,0515	0,1488	0,2936	0,2965	0,2090	0,1094	0,0413	0,0100	0,0011	0,0000	0,0000
3	0,0054	0,0331	0,1468	0,2541	0,2787	0,2188	0,1239	0,0467	0,0092	0,0004	0,0000
4	0,0004	0,0046	0,0459	0,1361	0,2322	0,2734	0,2322	0,1361	0,0459	0,0046	0,0004
5	0,0000	0,0004	0,0092	0,0467	0,1239	0,2188	0,2787	0,2541	0,1468	0,0331	0,0054
6	0,0000	0,0000	0,0011	0,0100	0,0413	0,1094	0,2090	0,2965	0,2936	0,1488	0,0515
7	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0079	0,0313	0,0896	0,1977	0,3355	0,3826	0,2793
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0039	0,0168	0,0576	0,1678	0,4305	0,6634

$n = 9$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0	0,6302	0,3874	0,1342	0,0404	0,0101	0,0020	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,2985	0,3874	0,3020	0,1556	0,0605	0,0176	0,0035	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0629	0,1722	0,3020	0,2668	0,1612	0,0703	0,0212	0,0039	0,0003	0,0000	0,0000
3	0,0077	0,0446	0,1762	0,2668	0,2508	0,1641	0,0743	0,0210	0,0028	0,0001	0,0000
4	0,0006	0,0074	0,0661	0,1715	0,2508	0,2461	0,1672	0,0735	0,0165	0,0008	0,0000
5	0,0000	0,0008	0,0165	0,0735	0,1672	0,2461	0,2508	0,1715	0,0661	0,0074	0,0006
6	0,0000	0,0001	0,0028	0,0210	0,0743	0,1641	0,2508	0,2668	0,1762	0,0446	0,0077
7	0,0000	0,0000	0,0003	0,0039	0,0212	0,0703	0,1612	0,2668	0,3020	0,1722	0,0629
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0035	0,0176	0,0605	0,1556	0,3020	0,3874	0,2985
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0020	0,0101	0,0404	0,1342	0,3874	0,6302

$n = 10$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0	0,5987	0,3487	0,1074	0,0282	0,0060	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,3151	0,3874	0,2684	0,1211	0,0403	0,0098	0,0016	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0746	0,1937	0,3020	0,2335	0,1209	0,0439	0,0106	0,0014	0,0001	0,0000	0,0000
3	0,0105	0,0574	0,2013	0,2668	0,2150	0,1172	0,0425	0,0090	0,0008	0,0000	0,0000
4	0,0010	0,0112	0,0881	0,2001	0,2508	0,2051	0,1115	0,0368	0,0055	0,0001	0,0000
5	0,0001	0,0015	0,0264	0,1029	0,2007	0,2461	0,2007	0,1029	0,0264	0,0015	0,0001
6	0,0000	0,0001	0,0055	0,0368	0,1115	0,2051	0,2508	0,2001	0,0881	0,0112	0,0010
7	0,0000	0,0000	0,0008	0,0090	0,0425	0,1172	0,2150	0,2668	0,2013	0,0574	0,0105
8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0014	0,0106	0,0439	0,1209	0,2335	0,3020	0,1937	0,0746
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0016	0,0098	0,0403	0,1211	0,2684	0,3874	0,3151
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0010	0,0060	0,0282	0,1074	0,3487	0,5987

Continuação da Tabela 3

$n = 11$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0	0,5688	0,3138	0,0859	0,0198	0,0036	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,3293	0,3835	0,2362	0,0932	0,0266	0,0054	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0867	0,2131	0,2953	0,1998	0,0887	0,0269	0,0052	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0137	0,0710	0,2215	0,2568	0,1774	0,0806	0,0234	0,0037	0,0002	0,0000	0,0000
4	0,0014	0,0158	0,1107	0,2201	0,2365	0,1611	0,0701	0,0173	0,0017	0,0000	0,0000
5	0,0001	0,0025	0,0388	0,1321	0,2207	0,2256	0,1471	0,0566	0,0097	0,0003	0,0000
6	0,0000	0,0003	0,0097	0,0566	0,1471	0,2256	0,2207	0,1321	0,0388	0,0025	0,0001
7	0,0000	0,0000	0,0017	0,0173	0,0701	0,1611	0,2365	0,2201	0,1107	0,0158	0,0014
8	0,0000	0,0000	0,0002	0,0037	0,0234	0,0806	0,1774	0,2568	0,2215	0,0710	0,0137
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0052	0,0269	0,0887	0,1998	0,2953	0,2131	0,0867
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0007	0,0054	0,0266	0,0932	0,2362	0,3835	0,3293
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0036	0,0198	0,0859	0,3138	0,5688

$n = 12$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0	0,5404	0,2824	0,0687	0,0138	0,0022	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,3413	0,3766	0,2062	0,0712	0,0174	0,0029	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0988	0,2301	0,2835	0,1678	0,0639	0,0161	0,0025	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0173	0,0852	0,2362	0,2397	0,1419	0,0537	0,0125	0,0015	0,0001	0,0000	0,0000
4	0,0021	0,0213	0,1329	0,2311	0,2128	0,1208	0,0420	0,0078	0,0005	0,0000	0,0000
5	0,0002	0,0038	0,0532	0,1585	0,2270	0,1934	0,1009	0,0291	0,0033	0,0000	0,0000
6	0,0000	0,0005	0,0155	0,0792	0,1766	0,2256	0,1766	0,0792	0,0155	0,0005	0,0000
7	0,0000	0,0000	0,0033	0,0291	0,1009	0,1934	0,2270	0,1585	0,0532	0,0038	0,0002
8	0,0000	0,0000	0,0005	0,0078	0,0420	0,1208	0,2128	0,2311	0,1329	0,0213	0,0021
9	0,0000	0,0000	0,0001	0,0015	0,0125	0,0537	0,1419	0,2397	0,2362	0,0852	0,0173
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0025	0,0161	0,0639	0,1678	0,2835	0,2301	0,0988
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0029	0,0174	0,0712	0,2062	0,3766	0,3413
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0022	0,0138	0,0687	0,2824	0,5404

$n = 13$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0	0,5133	0,2542	0,0550	0,0097	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,3512	0,3672	0,1787	0,0540	0,0113	0,0016	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,1109	0,2448	0,2680	0,1388	0,0453	0,0095	0,0012	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0214	0,0997	0,2457	0,2181	0,1107	0,0349	0,0065	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0028	0,0277	0,1535	0,2337	0,1845	0,0873	0,0243	0,0034	0,0001	0,0000	0,0000
5	0,0003	0,0055	0,0691	0,1803	0,2214	0,1571	0,0656	0,0142	0,0011	0,0000	0,0000
6	0,0000	0,0008	0,0230	0,1030	0,1968	0,2095	0,1312	0,0442	0,0058	0,0001	0,0000
7	0,0000	0,0001	0,0058	0,0442	0,1312	0,2095	0,1968	0,1030	0,0230	0,0008	0,0000
8	0,0000	0,0000	0,0011	0,0142	0,0656	0,1571	0,2214	0,1803	0,0691	0,0055	0,0003
9	0,0000	0,0000	0,0001	0,0034	0,0243	0,0873	0,1845	0,2337	0,1535	0,0277	0,0028
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0065	0,0349	0,1107	0,2181	0,2457	0,0997	0,0214
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0095	0,0453	0,1388	0,2680	0,2448	0,1109
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0016	0,0113	0,0540	0,1787	0,3672	0,3512
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0013	0,0097	0,0550	0,2542	0,5133

$n = 14$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0	0,4877	0,2288	0,0440	0,0068	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,3593	0,3559	0,1539	0,0407	0,0073	0,0009	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,1229	0,2570	0,2501	0,1134	0,0317	0,0056	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Continuação da Tabela 3

$n = 14$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
3	0,0259	0,1142	0,2501	0,1943	0,0845	0,0222	0,0033	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0037	0,0349	0,1720	0,2290	0,1549	0,0611	0,0136	0,0014	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,0004	0,0078	0,0860	0,1963	0,2066	0,1222	0,0408	0,0066	0,0003	0,0000	0,0000
6	0,0000	0,0013	0,0322	0,1262	0,2066	0,1833	0,0918	0,0232	0,0020	0,0000	0,0000
7	0,0000	0,0002	0,0092	0,0618	0,1574	0,2095	0,1574	0,0618	0,0092	0,0002	0,0000
8	0,0000	0,0000	0,0020	0,0232	0,0918	0,1833	0,2066	0,1262	0,0322	0,0013	0,0000
9	0,0000	0,0000	0,0003	0,0066	0,0408	0,1222	0,2066	0,1963	0,0860	0,0078	0,0004
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0014	0,0136	0,0611	0,1549	0,2290	0,1720	0,0349	0,0037
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0033	0,0222	0,0845	0,1943	0,2501	0,1142	0,0259
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0056	0,0317	0,1134	0,2501	0,2570	0,1229
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0009	0,0073	0,0407	0,1539	0,3559	0,3593
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0068	0,0440	0,2288	0,4877

$n = 15$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0	0,4633	0,2059	0,0352	0,0047	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,3658	0,3432	0,1319	0,0305	0,0047	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,1348	0,2669	0,2309	0,0916	0,0219	0,0032	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0307	0,1285	0,2501	0,1700	0,0634	0,0139	0,0016	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0049	0,0428	0,1876	0,2186	0,1268	0,0417	0,0074	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,0006	0,0105	0,1032	0,2061	0,1859	0,0916	0,0245	0,0030	0,0001	0,0000	0,0000
6	0,0000	0,0019	0,0430	0,1472	0,2066	0,1527	0,0612	0,0116	0,0007	0,0000	0,0000
7	0,0000	0,0003	0,0138	0,0811	0,1771	0,1964	0,1181	0,0348	0,0035	0,0000	0,0000
8	0,0000	0,0000	0,0035	0,0348	0,1181	0,1964	0,1771	0,0811	0,0138	0,0003	0,0000
9	0,0000	0,0000	0,0007	0,0116	0,0612	0,1527	0,2066	0,1472	0,0430	0,0019	0,0000
10	0,0000	0,0000	0,0001	0,0030	0,0245	0,0916	0,1859	0,2061	0,1032	0,0105	0,0006
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0074	0,0417	0,1268	0,2186	0,1876	0,0428	0,0049
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0016	0,0139	0,0634	0,1700	0,2501	0,1285	0,0307
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0032	0,0219	0,0916	0,2309	0,2669	0,1348
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0047	0,0305	0,1319	0,3432	0,3658
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0047	0,0352	0,2059	0,4633

$n = 16$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0	0,4401	0,1853	0,0281	0,0033	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,3706	0,3294	0,1126	0,0228	0,0030	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,1463	0,2745	0,2111	0,0732	0,0150	0,0018	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0359	0,1423	0,2463	0,1465	0,0468	0,0085	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0061	0,0514	0,2001	0,2040	0,1014	0,0278	0,0040	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,0008	0,0137	0,1201	0,2099	0,1623	0,0667	0,0142	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,0001	0,0028	0,0550	0,1649	0,1983	0,1222	0,0392	0,0056	0,0002	0,0000	0,0000
7	0,0000	0,0004	0,0197	0,1010	0,1889	0,1746	0,0840	0,0185	0,0012	0,0000	0,0000
8	0,0000	0,0001	0,0055	0,0487	0,1417	0,1964	0,1417	0,0487	0,0055	0,0001	0,0000
9	0,0000	0,0000	0,0012	0,0185	0,0840	0,1746	0,1889	0,1010	0,0197	0,0004	0,0000
10	0,0000	0,0000	0,0002	0,0056	0,0392	0,1222	0,1983	0,1649	0,0550	0,0028	0,0001
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0013	0,0142	0,0667	0,1623	0,2099	0,1201	0,0137	0,0008
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0040	0,0278	0,1014	0,2040	0,2001	0,0514	0,0061
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0008	0,0085	0,0468	0,1465	0,2463	0,1423	0,0359
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0018	0,0150	0,0732	0,2111	0,2745	0,1463
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0030	0,0228	0,1126	0,3294	0,3706

Continuação da Tabela 3

$n = 16$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0033	0,0281	0,1853	0,4401

$n = 17$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0	0,4181	0,1668	0,0225	0,0023	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,3741	0,3150	0,0957	0,0169	0,0019	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,1575	0,2800	0,1914	0,0581	0,0102	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0415	0,1556	0,2393	0,1245	0,0341	0,0052	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0076	0,0605	0,2093	0,1868	0,0796	0,0182	0,0021	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,0010	0,0175	0,1361	0,2081	0,1379	0,0472	0,0081	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,0001	0,0039	0,0680	0,1784	0,1839	0,0944	0,0242	0,0026	0,0001	0,0000	0,0000
7	0,0000	0,0007	0,0267	0,1201	0,1927	0,1484	0,0571	0,0095	0,0004	0,0000	0,0000
8	0,0000	0,0001	0,0084	0,0644	0,1606	0,1855	0,1070	0,0276	0,0021	0,0000	0,0000
9	0,0000	0,0000	0,0021	0,0276	0,1070	0,1855	0,1606	0,0644	0,0084	0,0001	0,0000
10	0,0000	0,0000	0,0004	0,0095	0,0571	0,1484	0,1927	0,1201	0,0267	0,0007	0,0000
11	0,0000	0,0000	0,0001	0,0026	0,0242	0,0944	0,1839	0,1784	0,0680	0,0039	0,0001
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0081	0,0472	0,1379	0,2081	0,1361	0,0175	0,0010
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0021	0,0182	0,0796	0,1868	0,2093	0,0605	0,0076
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0052	0,0341	0,1245	0,2393	0,1556	0,0415
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0010	0,0102	0,0581	0,1914	0,2800	0,1575
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0019	0,0169	0,0957	0,3150	0,3741
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0023	0,0225	0,1668	0,4181

$n = 18$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0	0,3972	0,1501	0,0180	0,0016	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,3763	0,3002	0,0811	0,0126	0,0012	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,1683	0,2835	0,1723	0,0458	0,0069	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0473	0,1680	0,2297	0,1046	0,0246	0,0031	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0093	0,0700	0,2153	0,1681	0,0614	0,0117	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,0014	0,0218	0,1507	0,2017	0,1146	0,0327	0,0045	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,0002	0,0052	0,0816	0,1873	0,1655	0,0708	0,0145	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000
7	0,0000	0,0010	0,0350	0,1376	0,1892	0,1214	0,0374	0,0046	0,0001	0,0000	0,0000
8	0,0000	0,0002	0,0120	0,0811	0,1734	0,1669	0,0771	0,0149	0,0008	0,0000	0,0000
9	0,0000	0,0000	0,0033	0,0386	0,1284	0,1855	0,1284	0,0386	0,0033	0,0000	0,0000
10	0,0000	0,0000	0,0008	0,0149	0,0771	0,1669	0,1734	0,0811	0,0120	0,0002	0,0000
11	0,0000	0,0000	0,0001	0,0046	0,0374	0,1214	0,1892	0,1376	0,0350	0,0010	0,0000
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0012	0,0145	0,0708	0,1655	0,1873	0,0816	0,0052	0,0002
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0045	0,0327	0,1146	0,2017	0,1507	0,0218	0,0014
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0011	0,0117	0,0614	0,1681	0,2153	0,0700	0,0093
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0031	0,0246	0,1046	0,2297	0,1680	0,0473
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0069	0,0458	0,1723	0,2835	0,1683
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0126	0,0811	0,3002	0,3763
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0016	0,0180	0,1501	0,3972

$n = 19$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0	0,3774	0,1351	0,0144	0,0011	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,3774	0,2852	0,0685	0,0093	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,1787	0,2852	0,1540	0,0358	0,0046	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0533	0,1796	0,2182	0,0869	0,0175	0,0018	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Continuação da Tabela 3

$n = 19$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
4	0,0112	0,0798	0,2182	0,1491	0,0467	0,0074	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,0018	0,0266	0,1636	0,1916	0,0933	0,0222	0,0024	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,0002	0,0069	0,0955	0,1916	0,1451	0,0518	0,0085	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000
7	0,0000	0,0014	0,0443	0,1525	0,1797	0,0961	0,0237	0,0022	0,0000	0,0000	0,0000
8	0,0000	0,0002	0,0166	0,0981	0,1797	0,1442	0,0532	0,0077	0,0003	0,0000	0,0000
9	0,0000	0,0000	0,0051	0,0514	0,1464	0,1762	0,0976	0,0220	0,0013	0,0000	0,0000
10	0,0000	0,0000	0,0013	0,0220	0,0976	0,1762	0,1464	0,0514	0,0051	0,0000	0,0000
11	0,0000	0,0000	0,0003	0,0077	0,0532	0,1442	0,1797	0,0981	0,0166	0,0002	0,0000
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0022	0,0237	0,0961	0,1797	0,1525	0,0443	0,0014	0,0000
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0085	0,0518	0,1451	0,1916	0,0955	0,0069	0,0002
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0024	0,0222	0,0933	0,1916	0,1636	0,0266	0,0018
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0074	0,0467	0,1491	0,2182	0,0798	0,0112
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0018	0,0175	0,0869	0,2182	0,1796	0,0533
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0046	0,0358	0,1540	0,2852	0,1787
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0008	0,0093	0,0685	0,2852	0,3774
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0011	0,0144	0,1351	0,3774

$n = 20$

x	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0	0,3585	0,1216	0,0115	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,3774	0,2702	0,0576	0,0068	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,1887	0,2852	0,1369	0,0278	0,0031	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0596	0,1901	0,2054	0,0716	0,0123	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0133	0,0898	0,2182	0,1304	0,0350	0,0046	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,0022	0,0319	0,1746	0,1789	0,0746	0,0148	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,0003	0,0089	0,1091	0,1916	0,1244	0,0370	0,0049	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
7	0,0000	0,0020	0,0545	0,1643	0,1659	0,0739	0,0146	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000
8	0,0000	0,0004	0,0222	0,1144	0,1797	0,1201	0,0355	0,0039	0,0001	0,0000	0,0000
9	0,0000	0,0001	0,0074	0,0654	0,1597	0,1602	0,0710	0,0120	0,0005	0,0000	0,0000
10	0,0000	0,0000	0,0020	0,0308	0,1171	0,1762	0,1171	0,0308	0,0020	0,0000	0,0000
11	0,0000	0,0000	0,0005	0,0120	0,0710	0,1602	0,1597	0,0654	0,0074	0,0001	0,0000
12	0,0000	0,0000	0,0001	0,0039	0,0355	0,1201	0,1797	0,1144	0,0222	0,0004	0,0000
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0010	0,0146	0,0739	0,1659	0,1643	0,0545	0,0020	0,0000
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0049	0,0370	0,1244	0,1916	0,1091	0,0089	0,0003
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0013	0,0148	0,0746	0,1789	0,1746	0,0319	0,0022
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0046	0,0350	0,1304	0,2182	0,0898	0,0133
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0011	0,0123	0,0716	0,2054	0,1901	0,0596
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0031	0,0278	0,1369	0,2852	0,1887
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0068	0,0576	0,2702	0,3774
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0008	0,0115	0,1216	0,3585

Distribuição de Poisson-Poisson (λ)

Generalidades

Esse modelo foi criado pelo matemático e físico francês Siméon Denis Poisson (1781-1840), em 1837.

É um modelo usado para descrever as probabilidades do número de ocorrências de acontecimentos (eventos) raros, em geral num intervalo de tempo, distância, área ou volume (contínuo), como por exemplo o número de ligações erradas num circuito telefônico. O número de automóveis que passam numa esquina (observe que poderemos anotar o número de automóveis que passaram (sucesso), porém o número de carros que deixaram de passar não poderá ser determinado (fracasso)).

Note-se que a unidade de medida (tempo, área, volume) é contínuo, mas a variável (número de ocorrências) é discreta.

Sendo assim é denominada distribuição de "eventos raros".

Características de um experimento de Poisson

Um processo de Poisson refere-se normalmente ao número de eventos que ocorrem num intervalo temporal ou numa região espacial, sendo assim a utilização da distribuição de Poisson, baseia-se nas seguintes hipóteses.

i) A probabilidade de uma ocorrência é a mesma em todo o campo de observação;

ii) A probabilidade de mais de uma ocorrência (evento) num único ponto (intervalo muito pequeno) é aproximadamente zero. Quando "n" cresce indefinidamente, "p" tende para zero;

iii) O número de ocorrências (eventos) que ocorre em qualquer intervalo é independente do número de ocorrências(eventos) que ocorre em outros intervalos disjuntos, diz-se então que essa distribuição não tem memória.

Função de probabilidade

Se uma variável aleatória é descrita por uma distribuição de Poisson, então a probabilidade de se realizar um determinado número de ocorrências por unidade de medida (minuto, hora, cm^2, cm^3, etc.) é dado pela seguinte fórmula.

$$P(\mathrm{x} = \mathrm{k}) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{\mathrm{k}!}, \text{ onde } k = X \in \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$$

Onde,

$x = k$ é o número de ocorrências

e é a base do logaritmo natural

$e = 2{,}71828$

λ é a taxa média por intervalo ou unidade (constante positiva dada), $\lambda = \mu \cdot t$

λ é o número médio de eventos ocorrendo no intervalo considerado

A distribuição de Poisson é caracterizada por um único parâmetro (a média do processo que é o valor do λ).

Fórmula de recorrência da distribuição de poisson

$$P(X+1) = \frac{P(X)\lambda}{(X+1)}$$

Distribuição de probabilidade acumulada (função de repartição) de Poisson $[\boldsymbol{F(X)}]$

$$F(X) = \sum_{k=0}^{X \le x_i} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{K!}$$

Gráfico representativo da distribuição de probabilidades

O gráfico desse modelo de distribuição é um gráfico em hastes ou bastão como mostra a figura 6 a seguir.

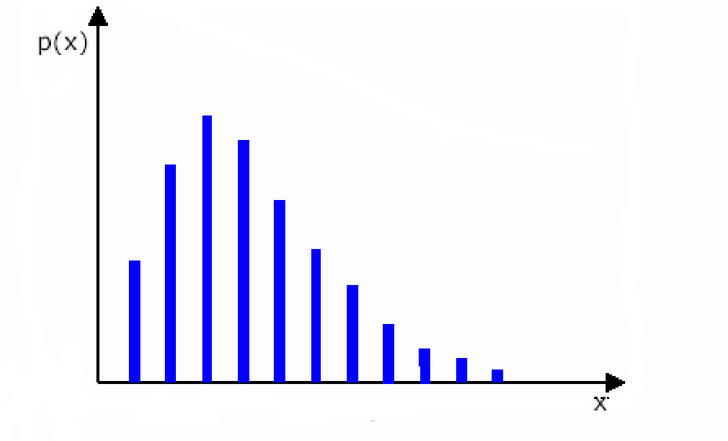


Figura 6. Gráfico representativo da distribuição de probabilidade de Poisson.

Gráficos da distribuição de probabilidade acumulada ou função de repartição ou função de distribuição da variável aleatória de Poisson.

Os gráficos da distribuição de probabilidade acumulada de Poisson estão em função do valor da média da distribuição λ e são gráficos em escada como mostram as Figuras 7 e 8 abaixo.

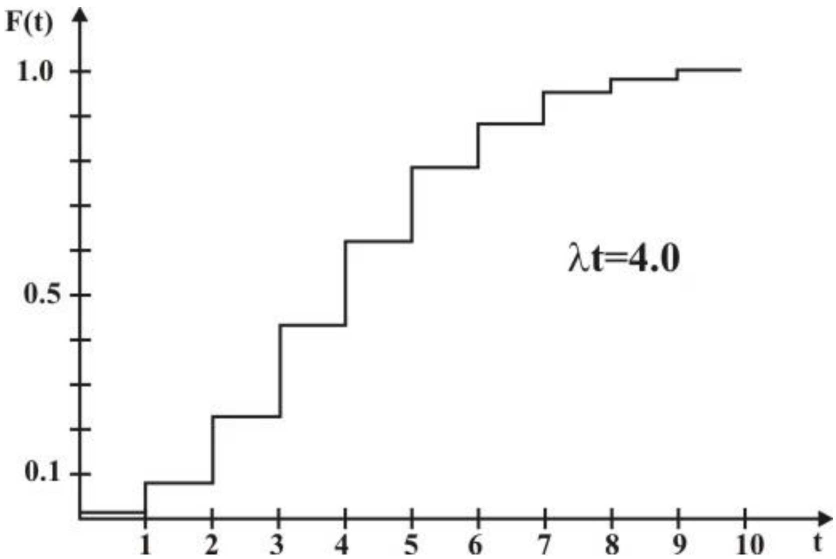


Figura 7. Gráfico representativo da distribuição de probabilidade acumulada da variável aleatória de POISSON com média igual a 4.

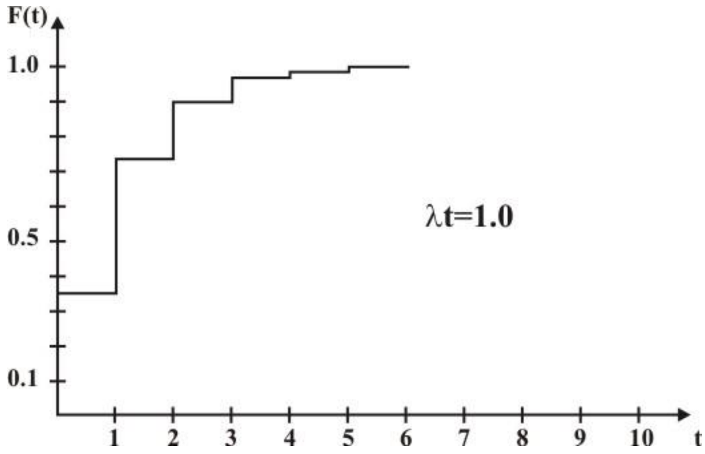


Figura 8. Gráfico representativo da distribuição de probabilidade acumulada da variável aleatória de POISSON com média igual a 1.

Medidas características: propriedades da distribuição de Poisson

i) Média: $E(x) = \mu_x = \lambda$

Pela definição de valor médio temos que:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} \text{XP(X=x)} = \sum_{x=0}^{+\infty} \text{X}e^{-\lambda}\frac{\lambda^X}{\text{X!}} = \sum_{x=1}^{+\infty} \text{X}e^{-\lambda}\frac{\lambda}{X}\frac{\lambda^{\text{X-1}}}{\text{(X-1)!}}$$

Fazendo $X - 1 = Y$, tem-se que:

$$E(X) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{Y=0}^{+\infty} \frac{\lambda^Y}{Y!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}, \text{ ou então}$$

$$E(X) = \lambda$$

ii) Variância: $V(x) = \sigma_x^2 = \lambda$

Para a variância temos que:

$$V(X)=\text{E}(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{X=0}^{+\infty} X^2\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^X}{X!} - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$V(X) = \lambda$$

iii) Desvio padrão:

É a raiz quadrada positiva da variância

$$D.P. = \sigma_x = \sqrt{\lambda}$$

iv) Moda: A distribuição é unimodal, se λ não for um número inteiro. Neste caso, a moda é dada por $Int[\lambda]$, ou seja, a parte inteira de λ.

A distribuição é bimodal, se λ é um número inteiro. Neste caso, as modas são $\lambda - 1$ e λ. A justificativa deste fato, baseia-se em resolver a desigualdades $P(X = x) \geq P(X = x - 1)$ e $P(X = x) \geq P(X = x + 1)$ em relação a x.

v) Coeficiente de assimetria:

$$a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

Sendo

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2\left(\mu_1'\right)^3$$

Como

$$\mu_3' = \sum_{x=0}^{+\infty} X^3\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^X}{X!} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda,$$

Têm-se que:

$$\mu_3 = \lambda,$$

Logo temos que:

$$a_3 = \frac{\lambda}{\lambda^{3/2}} = \frac{\lambda}{\lambda\lambda^{1/2}}$$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

Situações reais que envolvem variáveis aleatórias discretas ou descontínuas nas quais pode ser aplicado o modelo matemático da distribuição de Poisson.

São exemplos os seguintes casos:

a) O número de defeitos por cm^2 num tecido (fazenda) de linho;
b) O número de bactérias por volume unitário de um fluído;
c) O número de acidentes por dia num trecho de uma rodovia;
d) O número da ocorrência de gêmeos;
e) O número de desintegrações por segundo de um isótopo radioativo como o fósforo 32(p^{32}) e o urânio 238 (U^{238});

f) O número de chamadas telefônicas, Recebidas por uma central num intervalo de 1 hora;
g) O número de suicídios anual em uma população humana;
h) O número de óbitos por afogamentos em um fim de semana numa cidade praiana.
i) O número de falhas de um computador em um dia de operação;
j) O número de relatórios de acidentes, enviados a uma companhia de seguro em uma semana;
k) O número de nematoides encontrados em amostras de solo;
l) O número diário de novos casos de câncer de mama;
m) O número de células contadas usando um hemocitrômetro;
n) O número de ovos depositados por ninho na espécie de pássaro gavião;
o) O número de suicídios em uma população humana durante o período de um ano;
p) O número de mortes por afogamentos em um final de semana em uma cidade praiana;
q) O número de árvores ou plantas de orquídeas selvagens encontradas por hectare em uma reserva de mata atlântica;
r) O número anual de mortos de homens (soldados) por coice de cavalo nos regimentos do exército Prussiano de cavalaria entre 1875 e 1894.
s) O número de sementes de ervas daninhas presentes num lote de sementes de uma cultura;
t) O número de registros anuais de cânceres, em uma população humana;
u) O número de óbitos diários em um grande hospital;
v) O número de bactérias por mililitro (ml) de urina, em pacientes de um laboratório de análises clínicas;
w) O número de pacientes que chegam diariamente em centros de saúde;
x) Etc.

Notação

$X \sim$ pois (λ), significa que uma variável aleatória discreta X possui distribuição de probabilidade de Poisson com parâmetro λ.

Função geradora de momentos

$$m_x(t) = \exp[\lambda(e^t - 1)]$$

Exercícios de aplicação.

1) Numa agroindústria, há uma média de 3 acidentes por mês ($\lambda = 3$). Pergunta-se: $k = x \in \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$.

i) Qual é a probabilidade de ocorrerem 2 acidentes no próximo mês?

$$\begin{cases} \lambda = 3 \\ k = 2 \end{cases} P(x = 2) = \frac{3^2 . e^{-3}}{2!} = 0{,}2240418 = 22{,}40\%$$

ii) Qual é a probabilidade de ocorrerem pelo menos um acidente por mês?

$$P(x \geq 1) = P(x = 1) + P(x = 2) + \ldots + P(x = 8) + \ldots + \text{ou } P(x \geq 1)$$

$$= 1 - [P(x = 0)], \text{pois} \sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$$

$$P(x \geq 1) = 1 - \left[\frac{3^0 . e^{-3}}{0!}\right] = 1 - 0{,}049787068$$

$$P(x \geq 1) = 0{,}95021293 = 95{,}02\%$$

iii) Qual é a probabilidade de ocorrerem no máximo 2 acidentes por mês?

$$P(x \leq 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)$$

$$P(x \leq 2) = \frac{3^0 . e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 . e^{-3}}{0!} + \frac{3^2 . e^{-3}}{2!}$$

$$P(x \leq 2) = 0{,}049787068 + 0{,}149361205 + 0{,}224041807 = 0{,}42319008$$

$$P(x \leq 2) = 42{,}319\%$$

iv) Quanto vale $P(x = 8)$?

$$P(x = 8) = \frac{3^8 . e^{-3}}{8!} = \frac{0{,}049787068}{40320} = 0{,}008101511795$$

$$P(x = 8) = 0{,}81\%$$

v) Quanto vale $P(x = 11)$?

$$P(x = 11) = \frac{3^{11} . e^{-3}}{11!} = \frac{177147 . 0{,}049787068}{39916.800}$$

$$P(x = 11) = 0{,}00022095032 = 0{,}0221\%$$

vi) Quais os valores da média, variância e do desvio padrão.

$$E(x) = \mu_x = 3$$

$$V(x) = \sigma_x^2 = 3$$

$$D.P. = \sigma x = \sqrt{3} = 1{,}7321$$

2) O número X de animais caprinos da raça Moxotó, que entram diariamente em uma unidade de tratamento intensivo (UTI) de um hospital veterinário, em Mossoró, Rn apresenta distribuição de Poisson, com média de 5 animais por dia.

Qual é a probabilidade de que o número de animais a entrar na UTI desse hospital, em um dia particular:

i) seja igual a 2?

ii) E inferior ou igual a 2?

Respostas: 0,0084; 0,125

iii) Pode-se esperar que X exceda 10? Justifique.

Não.

i) $\lambda = 5$ animais/dia

$$P(x = 2) = \frac{5^2 \,.\, e^{-5}}{2!} = \frac{25.0{,}00673794}{2}$$

$$P(x = 2) = 0{,}0842242 \approx 8{,}42\%$$

ii) $P(x \leq 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)$

$$P(x \leq 2) = \frac{5^0 \,.\, e^{-5}}{0!} + \frac{5^1 \,.\, e^{-5}}{1!} + \frac{5^2 \,.\, e^{-5}}{2!}$$

$$P(x \leq 2) = 0{,}00673794 = 0{,}0336897 + 0{,}0842243$$

$$P(x \leq 2) = 0{,}1246519 \approx 12{,}5\ \%$$

iii) Não pois a probabilidade desse evento ocorrer é infinitamente pequena, praticamente nula, portanto desprezível.

3) Se numa certa massa de fósforo radioativo (P_{32}) se desintegram, em média, 27 átomos por minuto,

i) Qual é a probabilidade de numa contagem de 5 minutos, ocorrerem no máximo duas desintegrações?

Se a média é de 2,7 átomos por minutos, será de 13,5 átomos em 5 minutos.

$$\lambda = \mu t, \qquad \lambda = 2{,}7 \cdot 5 = 13{,}5$$

$$P(x \leq 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)$$

$$P(x \leq 2) = \frac{13,5^0 \cdot e^{-13,5}}{0!} + \frac{13,5^1 \cdot e^{-13,5}}{1!} + \frac{13,5^2 \cdot e^{-13,5}}{2!} = 0,000145$$

$$P(x \leq 2) = 0,00000137095909 + 0,0000185079477 + 0,000124928647$$

$$P(x \leq 2) == 0,000144807544 \cong 0,000142 = 0,0145\%$$

$$\begin{cases} 1 \text{ minuto} \_\_\_\_\_\_ 2,7 \text{ átomos} \\ 5 \text{ minutos} \_\_\_\_\_ X \end{cases}$$

$$X = 13,5 \, \acute{a}tomos$$

ii) Qual é a probabilidade de ocorrer no máximo uma desintegração por minuto?

$$P(x \leq 1) = P(x = 0) + P(x = 1)$$

$$P(x \leq 1) = \frac{2,7^0 \cdot e^{-2,7}}{0!} + \frac{2,7^1 \cdot e^{-2,7}}{1!}$$

$$P(x \leq 1) = 0,0672055 + 0,1814548$$

$$P(x \leq 1) = 0,2486603 = 24,87\%$$

4) O número de afogamentos em fins de semanas, na cidade praiana de Natale, é de dois para cada 50.000 habitantes. Qual a probabilidade de que em:

i) 200.000 habitantes ocorram 5 afogamentos?

ii) 112.500 habitantes ocorram pelo menos 3 afogamentos?

X: número de afogamentos por β habitantes (Poisson)

Resolução:

i) $\beta = 200.000 \; \lambda = vt = 200.000 \frac{2}{50000} = 8$

$$P(x = 5) = \frac{e^{-8} \cdot 8^5}{5!} = 0,091603$$

ii) $\beta = 112.500, \lambda = 4,5$

$$P(x \geq 3) = 1 - P(x < 3) = 1 - P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)$$

$$P(x \geq 3) = 1 - [0,011109 + 0,049990 + 0,112479]$$

$$P(x \geq 3) = 1 - 0,173578$$

$$P(x \geq 3) = 0{,}826422 = 82{,}64\%$$

5) A taxa média de acidentes automobilístico em um certo trecho de uma rodovia (BR 304) é igual a 3 por semana.

i) Qual a probabilidade de não ocorrer nenhum acidente durante a próxima semana?

$$\lambda = 3$$

$$K = 0$$

$$P(x = 0) = \frac{3^0 \cdot e^{-3}}{0!} = 0{,}049787 = 4{,}98\%$$

ii) Qual a probabilidade de ocorrer pelo menos um acidente na próxima semana?

$$P(x \geq 1) = 1 - [P(x = 0)] = 1 - 0{,}049787 = 0{,}9502 = 95{,}02\%$$

6) Uma máquina fabrica pregos com 1% de defeitos.

i) Qual é a distribuição do número de defeitos numa amostra de 50 pregos?

$$P = 0{,}01 \quad \lambda = \mu = E(x) = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}01 = 0{,}5$$

$$n = 50$$

$$P(x) = \frac{0{,}5^x \cdot e^{-0{,}5}}{x!}, 0 \leq x \leq 50$$

ii) Qual é a probabilidade de nenhum prego ser defeituoso na amostra?

$$P(x = 0) = \frac{0{,}5^0 \cdot e^{-0{,}5}}{0!} = 0{,}6065$$

7) Um posto telefônico recebe, em média, 10 chamadas por minuto: Pede-se a probabilidade de:

i) Não ocorrer nenhuma chamada em 1 minuto? E em 2 minutos?

ii) Ocorrer menos que 3 chamadas em 2 minutos?

iii) Ocorrer mais que 4 chamadas em 0,3 minutos?

Solução: $\lambda = 10 \text{ chamadas/minuto}$

i) $t = 1\, minuto$

$$\mu = \lambda t = 10 \cdot 1 = 10\, chamadas$$

Logo,

$$P[(x = 0, \mu = 10)] = \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^x}{x!} = \frac{e^{-10} \cdot (10)^0}{0!} = \frac{1}{e^{10}} = 0{,}000045$$

Para $t = 2$ minutos

$$\mu = \lambda t = 10 \cdot 2 = 20 \text{ chamadas}$$

$$P[(x = 0, \mu = 20)] = \frac{e^{-20}.(20)^0}{0!} \cong 0{,}00000000206115 \text{ ou}$$

$$P[(x = 0, \mu = 20)] = \frac{e^{-\lambda t}.(\lambda t)^x}{x!} = \frac{e^{-20}.(20)^0}{0!} = \frac{1}{e^{20}} \cong 0$$

ii) $P[(x < 3, t = 2)] = ?$

Para $t = 2$,

$$\mu = \lambda t = 10 \cdot 2 = 20$$

$$P[(x < 3; \mu = 20)] = P[(x = 0, \mu = 20)] + P[(x = 1, \mu = 20)] + P[(x = 2, \mu = 20)]$$

$$P[(x < 3, \mu = 20)] = \frac{1}{e^{20}} + \frac{20}{e^{20}} + \frac{400}{e^{20}.2} \cong 0$$

iii) $P[(x > 4, t = 0{,}3] = ?$

Para $t = 0{,}3$,

$$\mu = \lambda t = 10 \cdot 0{,}3 = 3 \text{ chamadas}$$

$$P[(x > 4; \mu = 3)] = 1 - \{P[(x = 0, \mu = 3)] - P[(x = 1, \mu = 3)] - P[(x = 2, \mu = 3)] - P[(x = 3; \mu = 3)] - P[(x = 4; \mu = 3)]\}$$

$$P(x = 0) = 0{,}049787$$

$$P(x = 1) = 0{,}149361$$

$$P(x = 2) = 0{,}224042$$

$$P(x = 3) = 0{,}224042$$

$$P(x = 4) = 0{,}168031$$

$$P[(x > 4, \mu = 3)] = 1 - [0{,}0497987 = 0{,}149361 + 0{,}224042 + 0{,}224042 + 0{,}168031]$$

$$P[(x > 4, \mu = 3)] = 0{,}184737 \cong 18{,}47\%$$

8) O número de árvores da espécie *enterolobium glaziovii* benth. (nome vulgar timbaúba), se distribiui aleatoriamente em certa reserva florestal de mata atlântica com uma média de duas (2) árvores por hectare. X é o número de árvores de timbaúba, $X \in \{0,1,2,\ldots,\ \}$.

$E(X) = \mu = \lambda = 2$ árvores por hectare

$$p[X = x] = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},$$

i) Qual é a probabilidade de se encontrar por acaso cinco (5) árvores de Timbaúba por hectare?

ii) Qual é a probabilidade de se contarem no máximo duas (2) árvores de Timbaúba por hectare?

iii) Qual é a probabilidade de se localizar uma (1) árvore de Timbaúba em dois hectares? $\lambda = 2\mu = 2 \cdot 2 = 4$ árvores.

iv) Qual é o valor da média?

v) Qual é o valor da variância?

vi) Qual é o valor do desvio padrão?

Tabelas da distribuição de probabilidade de Poisson.

Tabela 4. Tabelas da Distribuição de Poisson

$$P(X = x \mid \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

X \ λ	**0,001**	**0,005**	**0,010**	**0,015**	**0,020**	**0,025**	**0,030**	**0,035**	**0,040**	**0,045**	**0,050**	**0,055**	**0,060**	**0,065**	**0,070**	**0,075**
0	0,99900	0,99501	0,99005	0,98511	0,98020	0,97531	0,97045	0,96561	0,96079	0,95600	0,95123	0,94649	0,94176	0,93707	0,93239	0,92774
1	0,00100	0,00498	0,00990	0,01478	0,01960	0,02438	0,02911	0,03380	0,03843	0,04302	0,04756	0,05206	0,05651	0,06091	0,06527	0,06958
2	0,00000	0,00001	0,00005	0,00011	0,00020	0,00030	0,00044	0,00059	0,00077	0,00097	0,00119	0,00143	0,00170	0,00198	0,00228	0,00261
3	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00001	0,00001	0,00002	0,00003	0,00003	0,00004	0,00005	0,00007
4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
5	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

X \ λ	**0,080**	**0,085**	**0,090**	**0,095**	**0,100**	**0,105**	**0,110**	**0,115**	**0,120**	**0,125**	**0,130**	**0,135**	**0,140**	**0,145**	**0,150**	**0,155**
0	0,92312	0,91851	0,91393	0,90937	0,90484	0,90032	0,89583	0,89137	0,88692	0,88250	0,87810	0,87372	0,86936	0,86502	0,86071	0,85642
1	0,07385	0,07807	0,08225	0,08639	0,09048	0,09453	0,09854	0,10251	0,10643	0,11031	0,11415	0,11795	0,12171	0,12543	0,12911	0,13274
2	0,00295	0,00332	0,00370	0,00410	0,00452	0,00496	0,00542	0,00589	0,00639	0,00689	0,00742	0,00796	0,00852	0,00909	0,00968	0,01029
3	0,00008	0,00009	0,00011	0,00013	0,00015	0,00017	0,00020	0,00023	0,00026	0,00029	0,00032	0,00036	0,00040	0,00044	0,00048	0,00053
4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00002	0,00002	0,00002
5	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Continuação da Tabela 4.

X \ λ	**0,200**	**0,300**	**0,400**	**0,500**	**0,600**	**0,700**	**0,800**	**0,900**	**1,000**	**1,100**	**1,200**	**1,300**	**1,400**	**1,500**	**1,600**	**1,700**
0	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657	0,36788	0,33287	0,30119	0,27253	0,24660	0,22313	0,20190	0,18268
1	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591	0,36788	0,36616	0,36143	0,35429	0,34524	0,33470	0,32303	0,31056
2	0,01637	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466	0,18394	0,20139	0,21686	0,23029	0,24167	0,25102	0,25843	0,26398
3	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940	0,06131	0,07384	0,08674	0,09979	0,11278	0,12551	0,13783	0,14959
4	0,00005	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497	0,00767	0,01111	0,01533	0,02031	0,02602	0,03243	0,03947	0,04707	0,05513	0,06357
5	0,00000	0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200	0,00307	0,00447	0,00625	0,00843	0,01105	0,01412	0,01764	0,02162
6	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030	0,00051	0,00082	0,00125	0,00183	0,00258	0,00353	0,00470	0,00612
7	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00002	0,00004	0,00007	0,00013	0,00021	0,00034	0,00052	0,00076	0,00108	0,00149
8	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00002	0,00003	0,00006	0,00009	0,00014	0,00022	0,00032
9	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00001	0,00002	0,00004	0,00006
10	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00001
11	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

X \ λ	**1,800**	**1,900**	**2,000**	**2,100**	**2,200**	**2,300**	**2,400**	**2,500**	**2,600**	**2,700**	**2,800**	**2,900**	**3,000**	**3,100**	**3,200**	**3,300**
0	0,16530	0,14957	0,13534	0,12246	0,11080	0,10026	0,09072	0,08208	0,07427	0,06721	0,06081	0,05502	0,04979	0,04505	0,04076	0,03688
1	0,29754	0,28418	0,27067	0,25716	0,24377	0,23060	0,21772	0,20521	0,19311	0,18145	0,17027	0,15957	0,14936	0,13965	0,13044	0,12171
2	0,26778	0,26997	0,27067	0,27002	0,26814	0,26518	0,26127	0,25652	0,25104	0,24496	0,23838	0,23137	0,22404	0,21646	0,20870	0,20083
3	0,16067	0,17098	0,18045	0,18901	0,19664	0,20331	0,20901	0,21376	0,21757	0,22047	0,22248	0,22366	0,22404	0,22368	0,22262	0,22091
4	0,07230	0,08122	0,09022	0,09923	0,10815	0,11690	0,12541	0,13360	0,14142	0,14882	0,15574	0,16215	0,16803	0,17335	0,17809	0,18225
5	0,02603	0,03086	0,03609	0,04168	0,04759	0,05378	0,06020	0,06680	0,07354	0,08036	0,08721	0,09405	0,10082	0,10748	0,11398	0,12029

Continuação da Tabela 4.

X \ λ	1,800	1,900	2,000	2,100	2,200	2,300	2,400	2,500	2,600	2,700	2,800	2,900	3,000	3,100	3,200	3,300
6	0,00781	0,00977	0,01203	0,01459	0,01745	0,02061	0,02408	0,02783	0,03187	0,03616	0,04070	0,04546	0,05041	0,05553	0,06079	0,06616
7	0,00201	0,00265	0,00344	0,00438	0,00548	0,00677	0,00826	0,00994	0,01184	0,01395	0,01628	0,01883	0,02160	0,02459	0,02779	0,03119
8	0,00045	0,00063	0,00086	0,00115	0,00151	0,00195	0,00248	0,00311	0,00385	0,00471	0,00570	0,00683	0,00810	0,00953	0,01112	0,01287
9	0,00009	0,00013	0,00019	0,00027	0,00037	0,00050	0,00066	0,00086	0,00111	0,00141	0,00177	0,00220	0,00270	0,00328	0,00395	0,00472
10	0,00002	0,00003	0,00004	0,00006	0,00008	0,00011	0,00016	0,00022	0,00029	0,00038	0,00050	0,00064	0,00081	0,00102	0,00126	0,00156
11	0,00000	0,00000	0,00001	0,00001	0,00002	0,00002	0,00003	0,00005	0,00007	0,00009	0,00013	0,00017	0,00022	0,00029	0,00037	0,00047
12	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00001	0,00001	0,00002	0,00003	0,00004	0,00006	0,00007	0,00010	0,00013
13	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00001	0,00001	0,00002	0,00002	0,00003
14	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00001
15	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

X \ λ	3,500	4,000	4,500	5,000	5,500	6,000	6,500	7,000	7,500	8,000	8,500	9,000	9,500	10,000	10,500	11,000
0	0,03020	0,01832	0,01111	0,00674	0,00409	0,00248	0,00150	0,00091	0,00055	0,00034	0,00020	0,00012	0,00007	0,00005	0,00003	0,00002
1	0,10569	0,07326	0,04999	0,03369	0,02248	0,01487	0,00977	0,00638	0,00415	0,00268	0,00173	0,00111	0,00071	0,00045	0,00029	0,00018
2	0,18496	0,14653	0,11248	0,08422	0,06181	0,04462	0,03176	0,02234	0,01556	0,01073	0,00735	0,00500	0,00338	0,00227	0,00152	0,00101
3	0,21579	0,19537	0,16872	0,14037	0,11332	0,08924	0,06881	0,05213	0,03889	0,02863	0,02083	0,01499	0,01070	0,00757	0,00531	0,00370
4	0,18881	0,19537	0,18981	0,17547	0,15582	0,13385	0,11182	0,09123	0,07292	0,05725	0,04425	0,03374	0,02540	0,01892	0,01395	0,01019
5	0,13217	0,15629	0,17083	0,17547	0,17140	0,16062	0,14537	0,12772	0,10937	0,09160	0,07523	0,06073	0,04827	0,03783	0,02929	0,02242
6	0,07710	0,10420	0,12812	0,14622	0,15712	0,16062	0,15748	0,14900	0,13672	0,12214	0,10658	0,09109	0,07642	0,06306	0,05125	0,04109
7	0,03855	0,05954	0,08236	0,10444	0,12345	0,13768	0,14623	0,14900	0,14648	0,13959	0,12942	0,11712	0,10371	0,09008	0,07688	0,06458
8	0,01687	0,02977	0,04633	0,06528	0,08487	0,10326	0,11882	0,13038	0,13733	0,13959	0,13751	0,13176	0,12316	0,11260	0,10090	0,08879

Continuação da Tabela 4.

X \ λ	**3,500**	**4,000**	**4,500**	**5,000**	**5,500**	**6,000**	**6,500**	**7,000**	**7,500**	**8,000**	**8,500**	**9,000**	**9,500**	**10,000**	**10,500**	**11,000**
9	0,00656	0,01323	0,02316	0,03627	0,05187	0,06884	0,08581	0,10140	0,11444	0,12408	0,12987	0,13176	0,13000	0,12511	0,11772	0,10853
10	0,00230	0,00529	0,01042	0,01813	0,02853	0,04130	0,05578	0,07098	0,08583	0,09926	0,11039	0,11858	0,12350	0,12511	0,12361	0,11938
11	0,00073	0,00192	0,00426	0,00824	0,01426	0,02253	0,03296	0,04517	0,05852	0,07219	0,08530	0,09702	0,10666	0,11374	0,11799	0,11938
12	0,00021	0,00064	0,00160	0,00343	0,00654	0,01126	0,01785	0,02635	0,03658	0,04813	0,06042	0,07277	0,08444	0,09478	0,10324	0,10943
13	0,00006	0,00020	0,00055	0,00132	0,00277	0,00520	0,00893	0,01419	0,02110	0,02962	0,03951	0,05038	0,06171	0,07291	0,08339	0,09259
14	0,00001	0,00006	0,00018	0,00047	0,00109	0,00223	0,00414	0,00709	0,01130	0,01692	0,02399	0,03238	0,04187	0,05208	0,06254	0,07275
15	0,00000	0,00002	0,00005	0,00016	0,00040	0,00089	0,00180	0,00331	0,00565	0,00903	0,01359	0,01943	0,02652	0,03472	0,04378	0,05335
16	0,00000	0,00000	0,00002	0,00005	0,00014	0,00033	0,00073	0,00145	0,00265	0,00451	0,00722	0,01093	0,01575	0,02170	0,02873	0,03668
17	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00004	0,00012	0,00028	0,00060	0,00117	0,00212	0,00361	0,00579	0,00880	0,01276	0,01774	0,02373
18	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00004	0,00010	0,00023	0,00049	0,00094	0,00170	0,00289	0,00464	0,00709	0,01035	0,01450
19	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00003	0,00009	0,00019	0,00040	0,00076	0,00137	0,00232	0,00373	0,00572	0,00840
20	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00003	0,00007	0,00016	0,00032	0,00062	0,00110	0,00187	0,00300	0,00462
21	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00003	0,00006	0,00013	0,00026	0,00050	0,00089	0,00150	0,00242
22	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00002	0,00005	0,00011	0,00022	0,00040	0,00072	0,00121
23	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00002	0,00004	0,00009	0,00018	0,00033	0,00058
24	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00002	0,00004	0,00007	0,00014	0,00027
25	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00001	0,00003	0,00006	0,00012
26	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00002	0,00005
27	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00002
28	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001
29	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Aproximação da distribuição binomial através da distribuição de Poisson

Generalidades

Uma aplicação interessante da distribuição de Poisson é a sua utilização como aproximação à distribuição, binomial, ou seja, à medida que o valor de n cresce e o valor de P decresce mantendo $\lambda = np$ constante, a distribuição binomial tende para a distribuição de Poisson.

Quando n é grande e p é pequeno, podemos usar Poisson para avaliar probabilidades binominais. Ou seja as condições abaixo devem ser seguidas nessa aproximação, as quias são as seguintes.

$$\begin{cases} n \rightarrow \infty \, n \geq 30 \\ p \rightarrow 0 \, p < 0{,}1 \\ 0 < \mu \leq 10 \quad \mu = np = \lambda \end{cases}$$

Outros autores recomendam como regra prática usamos Poisson para aproximar a binomial se: $n \geq 30$ e $np < 5$ ou $n(1-p) < 5$. Ou nas seguintes situações.

$$\begin{cases} n \geq 10 \\ P \leq 0{,}01 \end{cases} \begin{cases} n \geq 20 \\ P \leq 0{,}03 \end{cases} \begin{cases} n \geq 50 \\ P \leq 0{,}05 \end{cases} \begin{cases} n \geq 100 \\ P \leq 0{,}08 \end{cases}$$

A vantagem da aproximação reside no fato de que a precisão sofre muito pouco e que o trabalho dos cálculos é reduzido ou seja é menor.

Ao usarmos Poisson para aproximar a binomial temos:

$$\mu_{(x)} = np = \lambda \ \therefore \ p = \frac{\lambda}{n}, q = 1 - \frac{\lambda}{n}, \sigma^2_{(x)} = npq = \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \text{ e } \sigma_{(x)} = \sqrt{\lambda\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)}$$

Assim, para a distribuição binomial, tem-se:

$$P(X = x) = \frac{n!}{X!(n-x)!} P^x q^{n-x}$$

Fazendo

$P = \frac{\lambda}{n}$, fica

$$P(\text{X=x}) = \frac{n(n-1)\cdots(n-X+1)}{X!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{\text{n-X}}\left(1\text{-}\frac{\lambda}{n}\right)^{\text{n-X}}$$

Onde A_X^n possui X termos. Assim,

$$P(\text{X=x}) = \frac{\lambda^X}{X!}\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\cdots\frac{(n-X+1)}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1\text{-}\frac{\lambda}{n}\right)^{\text{-X}}$$

$$P(\text{X=x}) = \frac{\lambda^X}{X!}\left(1\text{-}\frac{\lambda}{n}\right)^{\text{-X}}\left(1\text{-}\frac{1}{n}\right)\left(1\text{-}\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1\text{-}\frac{X-1}{n}\right)^{\text{-X}}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

Levando $P(X = x)$ ao limite com $n \to +\infty$, tem-se que:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-X} = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \cdots = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{X-1}{n}\right) = 1$$

E pelo limite notável, $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} = e^{-\lambda}$

De maneira que

$$\lim_{n\to+\infty} P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^X}{X!}$$

que é a função de probabilidade de X com distribuição de probabilidade de Poissson de parâmetro $\lambda = np$.

Comparação entre a distribuição binomial e de Poisson:

	BINOMIAL	POISSON
RESULTADOS POSSÍVEIS	Valores inteiros de 0 a n	Valores Inteiros de 0 a ∞
OBSERVAÇÕES	Contagem de sucessos ou fracassos	Contagem de sucessos
PARÂMETROS	n e p	λ

Exercícios de aplicação

1) Em uma fábrica, na produção de 500 itens, 1 é defeituoso. Qual a probabilidade de encontrarmos 3 itens defeituosos em 1000 itens.

$$n = 1000$$

$$\mathrm{P} = \frac{1}{500} = 0{,}002 \qquad \mathrm{P}(x) = \frac{\lambda^{X}.\, \mathrm{e}^{-\lambda}}{\mathrm{x}!} = \frac{(\mathrm{n.\,p.})^{x}\,.\, \mathrm{e}^{-\mathrm{n\,.\,p}}}{\mathrm{x}!}$$

$$\mathrm{n\,.\,p} = \lambda = 2 < 5$$

$$\sigma^2 = \mathrm{n\,.\,p\,.\,q} = \lambda\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)$$

$$\sigma^2 = 2\left(1 - \frac{2}{1000}\right) = 2(1-0{,}002) = 2\,.\,0{,}998 = 1{,}996$$

$$\sigma^2 = 2.(0{,}0998) = 1{,}996$$

$$P(\mathrm{X} = 3) = \frac{2^3\,.\,\mathrm{e}^{-2}}{3!} = \frac{8\,.\,0{,}13534}{3!} = 0{,}18 = 18\%$$

2) A probabilidade de uma lâmpada da marca phillts ser ligada é $\frac{1}{100}$. Numa instalação com 100 lâmpadas, qual a probabilidade de 2 lâmpadas se queimarem ao serem ligadas?

X: número de lâmpadas queimadas $x = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots 100\}$

X: $B\ (100; \frac{1}{100})$. Logo,

$$P(x = 2) = \binom{100}{2}(0{,}01)^2(0{,}99)^{100-2} \cong 0{,}1848648$$

$$P(x = 2) = 4950 \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}3734642$$

$$P(x = 2) = 0{,}1848648 = 18{,}49\%$$

Usando a aproximação pela Poisson temos que.

$$\lambda = np = 100 \cdot 0{,}01 = 1$$

$$P(x = 2) = \frac{e^{-1} \,.\, 1^2}{2!} = 0{,}183940$$

$$P(x = 2) = 18{,}394\%$$

Então $P(x = 2) - P(x = 2) = 0{,}1848648 - 0{,}183940 = 0{,}000924818$

Portanto uma diferença muito pequena.

3) A probabilidade de uma determinada marca de arado de disco agrícola, apresentar defeitos nos seus discos é 0,012. Ao se examinar ao acaso um lote de 80 arados, qual é a probabilidade de: (a) não haver nenhum arado com defeito (b) ocorrer pelo menos um arado defeituoso?

i) A probabilidade procurada é

$$P\ (x = 0) = \binom{80}{0} \,.\, (0{,}012)^0(0{,}988)^{80\text{-}0} = (0{,}988)^{80} = 0{,}380676 \cong 38\%$$

Como n é grande e P é pequeno neste caso, a aproximação de Poisson dá, $\mu = \lambda = 80.0{,}012 = 0{,}96$.

$$P(x = 0) = \frac{(0{,}96)^0 \,.\, e^{-0{,}96}}{0!} = 0{,}3828928 \cong 38\%$$

Resultado este muito próximo da resposta exata.

ii) $P(x \geq 1) = 1 - [P\ (x = 0)] = 1 - 0{,}380676 = 0{,}619324 \cong 62\%$

$$P\ (x \geq 1) = 1 - 0{,}3828928 = 0{,}617107114 \cong 61{,}71\% \cong 60$$

Distribuição hipergeométrica-HipGeom $(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{n})$

Introdução

A distribuição Binomial é o modelo adequado para estudar as propriedades dos esquemas probabilísticos do seguinte tipo: de uma urna que contém, N, bolas, apenas diferentes na sua cor, das quais, K, são brancas e, $N - K$, são pretas, $0 < p < 1, p + q = 1$, tiram-se, n, bolas, com reposição, isto é, devolvendo à urna cada bola logo após verificar a sua cor; qual a probabilidade de obter, x, bolas brancas? Este esquema presta-se a caracterizar um sem número de situações correntes, em que se colhem com reposição amostra de, n, elementos de um universo ou população com, N, elementos, dos quais, K, possuem determinado atributo (são fumadores, clientes de uma certa marca, doadores de sangue, etc.) e, $N - K$, não possuem esse atributo.

Como já mencionado a distribuição hipergeométrica tem uma relação bastante forte com a distribuição binomial. Essa distribuição se aplica às amostragens sem reposição de uma população dividida segundo dois atributos. Para defini-la, considerar a população de N elementos, em que k deles possui atributo A e $N - k$ o atributo B. Uma amostra de n elementos é retirada dessa população, sem reposição, e o foco de interesse é uma variável que representa o número de elementos na amostra que possui o atributo A. Se N é muito grande relativamente a n, a distribuição binominal pode ser usada como uma aproximação. A distribuição exata, nesse caso, é a hipergeométrica, cuja função de probabilidade é apresentada a seguir:

Função de probabilidade

O modelo matemático dessa distribuição de probabilidade é dado por:

$$P(X = x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N\text{-k}}{\text{n-x}}}{\binom{N}{n}}$$

em que $\text{Max}\,(0, n - N + k) \leq x \leq \min\,(k, n),\ 0 < P < 1, P + q = 1$

Notação: $x \sim H\ (N, n;\ p)$: Significa que a variável aleatória discreta X têm distribuição de probabilidade hipergeométrica.

Medidas características

A variável aleatória X, com função de probabilidade apresentada anteriormente, possui média e variância dadas respectivamente por:

i) **Média:** $\mu_x = np$

Sendo $p = \frac{k}{N} = \frac{N_1}{N}$, $q = 1 - p$, considerando $k = N_1$.

Se X tem distribuição hipergeométrica, então.

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} XP(X = x) = \sum_{x=1}^{n} X \frac{C_x^{N_1} C_{n-x}^{N_2}}{C_x^N}$$

Mas $C_x^{N_1} = \frac{N_1}{x} C_{x-1}^{N_1-1}$ e $C_n^N = \frac{N}{n} C_{n-1}^{N-1}$, logo,

$$E(X) = \sum_{x=1}^{n} \left[\frac{X \frac{N_1}{X} C_{x-1}^{N_1-1} C_{n-x}^{N_2}}{\frac{N}{n} C_{n-1}^{N-1}} \right]$$

Fazendo $X - 1 = Y$; $N_1 - 1 = M_1$; $N - 1 = M$; $n - 1 = k$ e ainda $N_2 = N - N_1 = (N - 1) - (N_1 - 1) = M - M_1 = M_2; n - X = k - Y$, obtém-se: $E(X) = n\frac{N_1}{N} \sum_{Y=0}^{K} \frac{C_Y^{M_1} C_{K-Y}^{M_2}}{C_K^M}$, como $\sum_{Y=0}^{K} \frac{C_Y^{M_1} C_{K-Y}^{M_2}}{C_K^M} = 1$, fica:

$$E(X) = np,\ p = \frac{N_1}{N}$$

ii) **Variância:** $\sigma_x^2 = np(1-p)\left[\frac{N-n}{N-1}\right]$ em que $p = \frac{k}{N}$.

Para a variância, tem-se:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - n^2p^2$$

Como $E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} X^2 \frac{C_X^{N_1} C_{n-X}^{N_2}}{C_n^N} = \frac{N_1}{N} n \sum_{x=1}^{n} X \frac{C_{X-1}^{N_1-1} C_{n-X}^{N_2}}{C_{n-1}^{N-1}} = np \sum_{Y=0}^{k} (Y+1) \frac{C_Y^{M_1} C_{k-Y}^{M_2}}{C_K^M} =$

$$E(X^2) = np\left[\frac{(n-1)(N_1-1)}{N-1} + 1\right]$$

$$V(X) = np\left[\frac{(n-1)(N_1-1)}{N-1} + 1\right] - n^2p^2 = np\left[\frac{(n-1)(N_1-1)}{N-1} + 1 - np\right]$$

$$= np\left[\frac{(N-n)(N-N_1)}{N(N-1)}\right] =$$

$$V(X) = \frac{N-n}{N-1} np \frac{N-N_1}{N} = \frac{N-n}{N-1} npq$$

Verifica-se, assim, que, em comparação com a distribuição binomial, a amostragem feita sem reposição afeta apenas a variância. O coeficiente $\frac{N-n}{N-1}$ é denominado fator de correção para populações finitas. Nota-se, que, quando N cresce, a correção vai, progressivamente, tornando-se desnecessária.

iii) Moda:

A distribuição é unimodal se $\frac{(k+1)(n+1)}{N+2}$ não for um número inteiro.

Neste caso, a moda é dada por $Int\left[\frac{(k+1)(n+1)}{N+2}\right]$ ou seja a parte inteira de $\left[\frac{(k+1)(n+1)}{N+2}\right]$

A distribuição é bimodal se $\left[\frac{(k+1)(n+1)}{N+2}\right]$ é um número inteiro. Neste caso, as modas são $\left[\frac{(k+1)(n+1)}{N+2} - 1\right]$ e $\left[\frac{(k+1)(n+1)}{N+2}\right]$.

A justificativa deste fato, baseia-se em resolver a desigualdades $P(X = x) \geq P(X = x - 1)$ e $P(X = x) \geq P(X = x + 1)$ em relação a x.

Função geradora de momentos:

Não utilizada.

Exercícios de aplicação

1) Em uma fazenda com 100 cabeças de gado, 4 estão com uma virose. i) Qual é a probabilidade de que uma amostra de tamanho $n = 10$ não apresenta animais doentes? ii) Qual é essa probabilidade, considerando agora uma amostra de tamanho $n = 20$?

$K = 4;\ N = 100;\ e\ p = 4/100 = 0{,}04.$

i) $P(X=0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{96}{10}}{\binom{100}{10}} = 0{,}6516 = 65{,}16\%$

ii) $P(X=0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{96}{20}}{\binom{100}{20}} = 0{,}4033 = 40{,}33\%$

2)

i) Calcule a média e a variância da variável X do exemplo 1, considerando $n = 10$;

ii) Utilize a distribuição binomial para aproximar a probabilidade obtida no exemplo 1 com $n = 10$.

Resolução.

i) $n = 10, \mu_x = np = 10 \cdot 0{,}04 = 0{,}4$ e

$$\sigma_x^2 = np(1-p)\left[\frac{N-n}{N-1}\right] = 10 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96 \cdot \left[\frac{100-10}{100-1}\right] = 0{,}349091$$

ii) $p = 0{,}04$ e $n = 10,$ logo, $P(X=0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^{10} = 0{,}6648$

A aproximação binomial não é muito boa nesse caso (erro relativo de 2%), pois o tamanho da população não pode ser considerado grande quando comparado ao tamanho da amostra ($n = 10$), pois $n/N > 0{,}05$.

A distribuição hipergeométrica tem grande utilidade no controle de qualidade dos processos de produção, na estimação de tamanhos de populações de diferentes espécies em diferentes nichos ecológicos, ameaçados de extinção ou não, ou em ambientes fechados, como por exemplo, peixes em tanques. Nessas situações de estimação do tamanho da população, comumente se utiliza o método da captura-recaptura. Nesse método sorteiam-se n_1 elementos que são marcados de alguma forma e retornados à população. Outra amostra aleatória de n_2 elementos é retirada dessa população, sendo observado o número de sucessos x, elementos marcados. O tamanho da população é, assim, estimado maximizando a probabilidade de se obter o valor x encontrado, usando a função de probabilidade $P(X = x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N\text{-k}}{\text{n-x}}}{\binom{N}{n}}$.

Distribuição geométrica ou de Pascal-$\boldsymbol{geom(p)}$

Introdução

A distribuição geométrica ou Pascal desempenha um importante papel na estatística. O nome distribuição geométrica ocorre porque os termos de sua função da probabilidade, para cada valor da variável aleatória, seguem uma série geométrica. Considerar uma sequência de ensaios independentes de Bernoulli, cuja probabilidade do sucesso em cada ensaio é igual a p. A variável aleatória X, definida como sendo o número de ensaios requeridos até a ocorrência do primeiro sucesso, segue a distribuição geométrica. O valor de $X(x)$ representa o número de fracassos consecutivos até a ocorrência do primeiro sucesso. O primeiro sucesso ocorrerá no ensaio $x + 1$, tendo x fracassos o antecedendo. Como os ensaios são independentes, os x fracassos têm probabilidade igual a $(1-p)^x$ e o sucesso do ensaio $x + 1$ tem probabilidade p. Então, para se obter a função de probabilidade do evento requerido, a qual está apresentada, a seguir basta multiplicar essas duas probabilidades. A distribuição geométrica é a única distribuição discreta que não tem memória, isto é, o número de tentativas que tem de se realizar, a partir de um dado momento até se conseguir o primeiro sucesso, não depende do número de tentativas já realizadas. Assim, $P(X \leq k + c | x > k) = P(x \leq c)$, ou de forma equivalente, $P(X > k + c | x > k) = P(X > c)$. A função apresentada abaixo é a função de probabilidades da distribuição geométrica.

Função de probabilidade

$$P(X = x) = (1 - p)^x p$$

em que $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ representa o número de falhas até a ocorrência do primeiro sucesso.

Medidas características

Uma variável aleatória X com distribuição geométrica é, muitas vezes, denominada de variável aleatória discreta de tempo de espera. Essa variável representa a espera, em termos do número de falhas, necessária para a ocorrência do primeiro sucesso. A média e a variável da distribuição geométrica são:

i) Média

$$\mu_x = \frac{q}{p}$$

ii) Variância

$$\sigma_x^2 = \frac{q}{p^2}$$

iii) Moda

A moda da distribuição e 1.

Função geradora de momentos

$$m_x(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t}$$

Exemplos de aplicação

Exemplo 1. Num processo de produção agrícola uma máquina empacota em média 1% dos produtos (castanha de caju) com peso abaixo do limite estabelecido pela legislação.

i) Qual é a probabilidade de se obter um sucesso (peso abaixo da especificação) no primeiro pacote amostrado?

ii) E no segundo pacote?

i) $p = 0{,}01$ (probabilidade do sucesso de o evento ocorrer – peso do empacotamento abaixo da especificação); $q = 0{,}99$; obter um sucesso no primeiro pacote amostrado equivale a não ter fracassos antes desse evento, ou seja, $X = 0$.

$$P\,(X = 0) = (1 - 0{,}01)0\,x\,0{,}01 = 1\%$$

ii) Ter o primeiro sucesso no segundo pacote significa que se obteve um fracasso no evento anterior, ou seja, $X = 1$, logo,

$$P(X = 1) = 0{,}99^1 \cdot 0{,}01 = 0{,}0099 = 0{,}99\%$$

Exemplo 2. A probabilidade de um animal caprino da raça Canindé contrair uma doença virótica a que foi exposto é de 0,80.

i) Qual é a probabilidade de o segundo animal exposto ser o primeiro a contrair a doença?

ii) Qual é a probabilidade que o primeiro a contrair a doença seja, no máximo, o terceiro animal exposto?

Respostas:

i) O evento de o segundo animal exposto ser o primeiro a contrair a doença significa que 1 animal exposto antes dele não contraiu a doença, ou seja, houve um fracasso antes (X = 1). Logo, a probabilidade requerida é:

$$P(X = 1) = (1 - p)^1 p = 0{,}20 \cdot 0{,}80 = 16\%$$

ii) Nesse caso, o evento é de que ou o primeiro sucesso ocorreu com o primeiro animal exposto $(X = 0$, nenhum fracasso antes), ou o primeiro sucesso ocorreu no segundo animal exposto ($X = 1$ fracasso antes), ou o primeiro sucesso ocorreu com o terceiro animal exposto ($X = 2$ fracassos antes). Logo, a probabilidade desejada é:

$$P\,(X \leq 2) = P\,(X = 0) + P\,(X = 1) + P\,(X = 2)$$

$$P\,(X \leq 2) = 0{,}8 + 0{,}16 + 0{,}032 = 99{,}2\%$$

A probabilidade de o primeiro a contrair a doença ser, no máximo, o terceiro animal exposto é de 99,2%.

A distribuição geométrica supõe que os ensaios são independentes e com probabilidade constante. Muitas vezes os ensaios são realizados em populações finitas sem reposição. Nesse caso, a distribuição adequada é denominada de hipergeométrica negativa e a função de probabilidade é dada pela fórmula descrita a seguir. Para melhor definir a situação, considerar X a variável aleatória que representa o número de fracassos consecutivos, antes da ocorrência do primeiro sucesso, resultantes de uma sequência de ensaios independentes de Bernoulli em uma população de N elementos com k deles possuindo o atributo (ou da classe ou categoria) A, representando os sucessos e $N-k$ com o atributo B (fracasso). A função de probabilidade é:

$$P(X=x)=\frac{k\binom{N-k}{x}}{(N-x)\binom{N}{x}}=\frac{\binom{N-x-1}{k-1}}{\binom{N}{k}}$$

em que $x\ =\ 0,1,2,3,\dots N-k$ representa o número de falhas até a ocorrência do primeiro sucesso.

Medidas características

As principais medidas características do modelo anterior são dadas por:

i) A média $\mu_x=\frac{N-k}{k+1}$

ii) variância $\sigma_x^2=\frac{k(N+1)(N-k)}{(k+2)(k+1)^2}$

Exemplo 3. Um lote de 100 sementes contém $k\ =\ 20$ contaminantes (sementes de outra variedade ou de outra cultivar ou de outra espécies). Se a amostragem de sementes desse lote é feita sem reposição (semente a semente), pergunta-se:

i) Qual é a probabilidade de que a primeira semente contaminante apareça na terceira extração?

ii) Qual é a probabilidade de que a primeira semente contaminante apareça no máximo na quarta extração?

i) $P(X=2)=\frac{20\binom{80}{2}}{(100-2)\binom{100}{2}}=0{,}130282=13{,}0282\%$

Se for usada a aproximação geométrica para essa probabilidade, sabendo que $p=20/100=0{,}02$, obtém-se:

$$P(x=2)=0{,}8^2\cdot 0{,}2=0{,}128=12{,}8\%$$

Se a população é muito grande, é possível usar a geométrica como forma de aproximar a hipergeométrica negativa.

ii) $P(X\leq 3)\ =\ P(X\ =\ 0)\ +\ P(X\ =\ 1)\ +\ P(X\ =\ 2)\ +\ P(X\ =\ 3)$

$$P(X\leq 3)=\frac{20\binom{80}{0}}{(100-0)\binom{100}{0}}+\frac{20\binom{80}{1}}{(100-1)\binom{100}{1}}+\frac{20\binom{80}{2}}{(100-2)\binom{100}{2}}+\frac{20\binom{80}{3}}{(100-3)\binom{100}{3}}$$

$$P(X \leq 3) = 0{,}20 + 0{,}16162 + 0{,}130282 + 0{,}10476318 = 59{,}67\%$$

Uma semente contaminante tem 59,67% de chances de aparecer a primeira vez até a quarta extração (sorteio ou ensaio).

Exemplo 4. Determinado equipamento, usado regularmente, não está sujeito a desgaste e tem probabilidade 0,001 de se avariar ou danificar em cada unidade de tempo, por exemplo, a semana. Qual a probabilidade de funcionar durante pelo menos 30 semanas?

Seja, X, em semanas, o tempo de espera por um "sucesso", i.e., uma avaria; x, tem distribuição geométrica, logo,

$$P(x > 30) = \sum_{x=31}^{\infty} (0{,}001)(1 - 0{,}001)^{x} = (0{,}999)^{30} = 0{,}970$$

Repare-se que a falta de memória no presente exemplo corresponde a ausência de fadiga por envelhecimento. Assim, decorrido um período com qualquer número de semanas, a probabilidade para que a partir do fim do período o equipamento funcione ainda mais 30 semanas continua a ser 0,970. No entanto, se o equipamento não se "esquecer" da idade que tem, o modelo Geométrico deixa de aplicar-se e os cálculos acima não são válidos.

Distribuição binomial negativa-BinNeg(r, p)

Introdução

Quando se fixa o número de provas de Bernoulli, seja n, o número de "sucessos" é uma variável aleatória que assume valores da sucessão finita, $0, 1, \dots, n$, e tem, como se viu na secção anterior, distribuição Binomial. Quando se fixa, em determinado problema, o número de "sucessos", seja, K, e se considera o número de provas que têm de realizar-se até se obterem K "sucessos" então o número de provas, seja Y, passa a ser uma variável aleatória, assume valores da sucessão infinita, $K, K + 1, K + 2$,... É fácil ver que a variável aleatória Y, tem função de probabilidade,

$$f(y) = P(Y = y) = \binom{y-1}{y-k} p^{k} q^{y-k},$$

$$y = K, K + 1, K + 2, \dots, 0 < p < 1, q = 1 - p$$

De fato, se somente ao fim de, $y, (y \geq K)$, provas se completam, K, “sucessos”, na y-ésima prova tem de obter-se um “sucesso”, o K-ésimo, e nas, $y - 1$, provas anteriores têm de obter-se, $K - 1$, “sucessos” e, $y - K$, “insucessos”. Assim, considerando que as provas são independentes,

$$P\ (Y\ =\ y)\ =\ \text{Prob}\ \{(K-1)\ \text{“sucessos” em}\ (y-1)\ \text{provas}\} \cdot\ \text{Prob}\ \{1\ \text{“sucesso” em 1 prova}\},$$

$$P(Y = y) = \binom{y-1}{k-1} p^{k-1} q^{y-1-(K-1)}\, p$$

Em vez de, Y, é corrente empregar, $X\ =\ Y - K$, onde, X, exprime o número de “falhas” ou “insucessos” verificados até ocorrerem, K, “sucessos”. Se, por hipótese, se realiza uma prova por unidade de tempo, X, pode considerar-se o tempo de espera por, K, “sucessos”. A variável aleatória, X, tem função probabilidade,

$$f(x) = P(X = x) = \binom{x+k-1}{x} p^k q^x,$$

$$x = 0{,}1{,}2, \ldots,\quad 0 < p < 1, \mathrm{q} = 1 - \mathrm{p}$$

a variável aleatória com essa função de probabilidade diz-se que tem distribuição Binomial negativa.

Essa família de distribuição de probabilidade é uma generalização da geométrica, ou seja, a geométrica é um caso particular da binomial negativa. Por outro lado, a soma de variáveis geométricas independentes, e identicamente distribuídas, possui distribuição binomial negativa. As distribuições geométrica e binomial negativa são versões discretas análogas das distribuições contínuas exponencial e gama, respectivamente.

Seja uma sequência de ensaios independentes de Bernoulli com probabilidade de sucessos constante p para cada ensaio. Seja a variável X definida como sendo igual ao número de fracassos requeridos para que ocorra o r-ésimo sucesso, então, X se distribui de acordo com a binomial negativa. Percebe-se que ocorreram x fracassos e $r - 1$ sucessos antes do r-ésimo sucesso no último ensaio. Cada configuração de x fracassos, com probabilidade $1 - p$, com $r - 1$ sucessos, com probabilidade p cada, tem probabilidade igual à $(1-p)^x p^{r-1}$. O número de combinações possíveis para organizar x fracassos em um total de $x\ +\ r\ - 1$ configurações é dado por:

$$\binom{x+r-1}{x} = \binom{x+r-1}{r-1}$$

Função de probabilidade

Assim, a função de probabilidade da distribuição binomial negativa pode ser obtida multiplicando-se esse número de combinações das configurações possíveis de fracassos e sucessos nos $x\ =\ r - 1$ ensaios anteriores ao r-ésimo sucesso pela probabilidade de cada configuração $(1-p)^x p^{r-1}$, e ainda, pela probabilidade p do r-ésimo sucesso, obtido independentemente no último ensaio. A função de probabilidade assim obtida está apresentada a seguir:

$$P(X = x) = \binom{x + r\text{-}1}{x} p^r(1-p)^x$$

em que $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ representa o número de falhas até a ocorrência do r-ésimo sucesso, $r = 1, 2, \ldots e\ o < p \leq 1, q = 1 - p$.

Fórmula de recorrência da distribuição binomial negativa

$$P(X+1) = \frac{P(K+X)}{q(X+1)}P(X)$$

Medidas características

A média e a variância da distribuição binomial negativa são dadas por:

i) Média: $\mu_x = \frac{r(1 - p)}{p}$

ii) Variância: $\sigma_x^2 = Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$

iii) Moda: A distribuição é unimodal, se $\frac{r-1}{p}$ não for um número inteiro. Neste caso, a moda é dada por $Int\left[\frac{r-1}{p} + 1\right]$, ou seja a parte inteira de $\left[\frac{r-1}{p} + 1\right]$

A distribuição é bimodal, se $\frac{r-1}{p}$ é um número inteiro. Neste caso, as modas são $\frac{r-1}{p}$ e $\frac{r-1}{p} + 1$.

A justificativa deste fato, baseia-se em resolver as desigualdades $P(X = x) \geq P(X = x - 1)$ e $P(X = x) \geq P(X = x + 1)$ em relação a x.

Da mesma forma que foi apresentada para a distribuição geométrica, a variável X que segue a binomial negativa é dita variável aleatória discreta de tempo de espera. A variável X representa o quanto deve ser esperado, em número de falhas, até que se obtenha o r-ésimo sucesso. Quando $r = 1$, a distribuição binomial negativa se especializa na distribuição geométrica.

Notação

$X \sim BN\ (r;\ P)$: significa que a variável aleatória X possui distribuição binomial negativa com parâmetros r e P.

Exemplo de aplicação

Considerar o exemplo 2 da Distribuição Geométrica e responder: a) qual é a probabilidade de que, com o quinto animal exposto, se obtenha o terceiro sucesso (animal doente)? b) qual é a probabilidade de se ter o terceiro sucesso no máximo até a quinta exposição?

i) $r = 3$ (3 sucessos) $x = 5 - 3 = 2$ (2 fracassos), $p = 0{,}8$ e $q = 0{,}2$

$$P(\text{x} = 2) = \binom{2 + 3 - 1}{2} \cdot 0{,}80^3 \cdot 0{,}2^2 = 12{,}288\%$$

A probabilidade de se obter o terceiro animal doente (sucesso) na quinta exposição é de 12,3%.

ii) $r = 3$ e $P(X \leq 2) = ?$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X \leq 2) = 0{,}2667 + 0{,}3072 + 0{,}12288 = 69{,}67\%$$

Existe uma chance de 69,67% de se esperar no máximo até a quinta exposição para se ter exatamente 3 sucessos (animais doentes).

Da mesma forma que foi generalizada a distribuição geométrica para a hipergeométrica negativa para comportar situações em que a população é finita, de tamanho N, e a amostragem feita sem reposição, pode generalizar o conceito da função de probabilidade apresentada na equação 6 para que o r-ésimo sucesso ocorra e não apenas o primeiro. A variável X $(x = 0, 1, 2, 3, \ldots, N - k)$ representa o número de falhas até a ocorrência do r-ésimo sucesso, $r = 1, 2, \ldots, k$, sendo, ainda, a amostragem feita sem reposição em uma população finita. Seja N o tamanho dessa população e seja k o número de realizações em um dado sorteio que é considerado como sucesso. A função de probabilidade dessa variável X é conhecida como hipergeométrica negativa e é uma forma generalizada da equação sendo apresentada abaixo:

Quando $r = 1$, a equação

$$P(X = x) = \frac{\binom{k}{r-1}\binom{N-k}{x}}{\binom{N}{x+r-1}} x \frac{k - r + 2}{N - x - r + 1} = \frac{\binom{x+r-1}{x}\binom{N-x-r}{k-r}}{\binom{N}{k}}$$

em que $x = 0, 1, 2, 3, \ldots N - k$ representa o número de falhas até a ocorrência do r-ésimo sucesso e k é o número de eventos favoráveis na população.

Reduzindo-se a seguinte equação..

$$P(X = x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N\text{-k}}{\text{n-x}}}{\binom{N}{n}}$$

Medidas características

A média e a variância da distribuição hipergeométrica negativa são:

i) Média: $\mu = \frac{r(N-k)}{k+1}$

ii) Variância: $\sigma_x^2 = \frac{r(N-k)(N+1)(k-r+1)}{(k+1)^2(k+2)}$

Distribuição multinomial-Mult(n, pi)

Introdução

Outra distribuição de probabilidade que desempenha um importante papel na estatística é a distribuição multinomial que é uma generalização da distribuição binomial. Seja $A_1, A_2, \dots, A_k$ um conjunto exaustivo de k eventos mutuamente exclusivos (ou de atributos ou de classes) e $p_1, p_2 \dots, p_k$ com $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, as correspondentes probabilidades associadas às ocorrências desses eventos em um dado ensaio. Seja X_i a variável aleatória correspondente ao número de ocorrências no evento A_i e X_i o número de realizações do evento $A_i (i = 1,2, \dots, k)$ em n independentes ensaios. Então: $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ e $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Função de probabilidade

A função de probabilidade conjunta das k variáveis é denominada função de probabilidade multinomial e está apresentada abaixo:

$$P(X_1 = x_{1,} X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k,) = \frac{n!}{x_1!\, x_2! \dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$$

Quando $k = 2$, ou seja, quando há apenas duas classes ou dois atributos na população, a função de probabilidade 15 se especializa na distribuição binomial. A média e a variância de cada variável X_i são dadas a seguir:

Medidas características

i) **Média:** $\mu_{x_i} = np_i$

ii) **Variância:** $\sigma_{x_i}^2 = np_i(1 - p_i)$

Outras distribuições de probabilidades discretas

Uma outra importante distribuição é a binomial truncada em 0. O modelo binomial é realista para caracterizar a distribuição da variável aleatória X, que, por alguma razão, o zero não pode ser observado. A função de probabilidade dessa distribuição é apresentada abaixo:

$$P(X = x) = \frac{\binom{n}{x} p^x q^{n-x}}{1 - q^n}; x = 1,2, \dots, n$$

Exemplo 1. Sabe-se que uma doença genética ataca uma espécie confinada a um nicho ecológico com probabilidade $p = 0{,}1$. Qual é a probabilidade de se encontrar $x = 1, 2, 3$ ou 4 animais doentes em uma ninhada com 4 filhotes e que já tenha um animal doente dentre eles?

Esse é um caso típico da distribuição binomial truncada em zero, uma vez que a ninhada sabidamente já tem um animal doente.

$$P(X=1)=\frac{\binom{4}{1}\,.\,0,1^{1}.\,0,9^{4-1}}{1-0,9^{4}}=84{,}79\%,$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{4}{2}\,.\,0,1^{2}\,.\,0,9^{4-2}}{1-0,9^{4}}=14{,}13\%$$

$$P(X=3)=\frac{\binom{4}{3}\,.\,0,1^{3}.\,0,9^{4-3}}{1-0,9^{4}}=1{,}05\%$$

$$P(X=4)=\frac{\binom{4}{4}\,.\,0,1^{4}.\,0,9^{4-4}}{1-0,9^{4}}=0{,}03\%$$

Pela mesma argumentação a distribuição de Poisson truncada em zero é dada pela função de probabilidade abaixo:

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!\,(1-e^{-\lambda})};\quad x=1{,}2{,}3{,}\ldots\ \infty$$

Uma outra função de probabilidade, não menos importante, é a beta-binomial, muitas vezes usada para construção de planos de amostragem sequencial ou em pesquisa de amostragem com vários pesquisadores de campo, amostradores ou entrevistadores envolvidos. A função de probabilidade dessa distribuição é apresentada na equação a seguir. Os parâmetros dessa distribuição são: a) n, inteiro ou não negativo, representando o tamanho da amostra; e b) os parâmetros reais α e β, tais que $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Essa distribuição surge naturalmente em situações em que n ensaios independentes de Bernoulli são realizados, mas cada ensaio tem probabilidade de sucesso diferente dos demais, e a distribuição beta (contínua) é usada para descrever a variabilidade de p nos diferentes ensaios.

$$P(X=x)=\binom{n}{x}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(x+a)\Gamma(n+\beta-x)}{\Gamma(n+a+\beta)};\ x=0{,}1{,}2{,}3{,}\ldots n$$

em que $\Gamma(m)=\int_0^\infty x^{m-1}e^{-x}dx$ é a chamada função gama. Se o argumento m dessa função é inteiro positivo, então $\Gamma(m)=(m-1)!$. Se $\alpha=\beta=1$, então a função de probabilidade em 20 se especializa na função de probabilidade uniforme discreta para $x = 0, 1, 2, \ldots, n$.

A média e a variância da beta-binomial são:

$$\mu_x=\frac{n\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{n\alpha\beta(n+\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)^2\,(\alpha+\beta+1)}$$

Exercícios de aplicação

1. Um pesquisador da área de entomologia resolveu que avaliaria seu experimento semanalmente e que o tamanho da amostra em número de plantas amostradas seria um valor entre 21 e 30. A escolha de um tamanho amostral x seria realizada de acordo com a distribuição uniforme discreta. Sabendo que o custo de cada planta amostrada é de R$ 1,50:

i) Explicitar a função de probabilidade de X, variável aleatória que representa o número de plantas amostradas em uma semana.

ii) Qual é o custo médio semanal esperado para a amostragem?

iii) Qual é a variância desse custo?

iv) Construir a $F(x)$ para todos os valores de x.

2. Se X é uma variável aleatória com distribuição binomial, determinar a $P\left(X < \mu_x - k\sigma_x\right)$ para as seguintes situações:

i) n = 30; p = 0,1; e k = 1 ou k = 2

ii) n = 30; p = 0,5; e k = 1 ou k = 2 ou k = 3

iii) n = 30; p = 0,9; e k = 1 ou k = 2

3. Um produtor de sementes afirma que o poder germinativo de suas sementes é 0,95. Um comprador testará uma amostra de 100 sementes e só comprará o lote se o número de sementes germinadas na amostra for superior a 90. Qual a probabilidade de o lote ser comprado?

4. Para realizar um levantamento de tamanho da população de peixes em um tanque um piscicultor resolveu utilizar o método da "captura" e "recaptura". Para isso realizou-se uma amostra de tamanho $n_1 = 30$ e todos os peixes foram marcados, retornando-os em seguida para o tanque. Numa nova amostra de $n_2 = 32$ peixes, verificou-se que dois deles continham a marca. Estimular o tamanho da população usando a distribuição hipergeométrica, procurando maximizar a probabilidade de se encontrar 2 peixes marcados na segunda amostragem. Sugestão: usar valores distintos de N e uma planilha eletrônica para facilitar os cálculos e verificar o comportamento das probabilidades. Dessa forma é possível rastrear o valor máximo da probabilidade, que será correspondente a uma estimativa de N.

5. O número médio de esporos de um determinado fungo por cm^3 de solo é igual a 0,05. Qual é a probabilidade de que uma amostra de $100cm^3$ não apresente nenhum esporo do fungo? Qual a probabilidade de que pelo menos 3 esporos sejam encontrados na amostra?

6. Um produtor de leite realiza inseminação artificial em seu plantel. Os machos são descartados, pois o interesse é na produção de leite. Quantas inseminações são necessárias para garantir pelo menos 95% da probabilidade de que o primeiro sucesso ocorra, ou seja, de nascer a primeira fêmea? Qual a probabilidade de o produtor ter que esperar até a terceira inseminação para ter o primeiro sucesso (primeira fêmea)?

7. A partir do enunciado do exercício número 6 responder:

i) Qual é a probabilidade de o produtor obter o segundo sucesso (fêmea) na terceira inseminação realizada?

ii) Quantas inseminações o produtor terá que esperar para garantir pelo menos 95% de chances de obtenção do terceiro sucesso?

iii) Qual é o valor médio esperado de inseminações para se obterem 3 sucessos (fêmeas)?

8. Construir a distribuição de probabilidade da variável X, número de fêmeas em leitegadas de tamanho 8, sabendo-se que todas as leitegadas possuem 1 fêmea. Qual seria a função de probabilidade da variável X, considerando-se que as leitegadas possuem 2 fêmeas dentre os $n = 8$ filhotes?

9. Mostrar que os valores da $E(X)$ e da σ_x^2 da distribuição uniforme discreta, para $x_i = 1,2,\dots,k$, são iguais a $\frac{k+1}{2}$ e $\frac{k^2-1}{12}$. Obter a média e a variância para a uniforme discreta com $x_i = 0,1,2,\dots,k-1$.

MODELOS DE DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS CONTÍNUAS

Distribuição de probabilidade Uniforme-U(a,b)

Generalidades

De acordo com BRESSAN (2002), MARTINS (2003), HOEL (1980), MEYER (1969), MORETTIN & BUSSAB (2003) e BATSCHELET (1978), uma variável aleatória contínua que admita distribuição constante em algum intervalo (a, b) e zero para valores externos é conhecida como distribuição retangular ou uniforme, a qual tem uso mais comum em primeira tentativa em casos em que apenas os limites dos dados são conhecidos.

A distribuição uniforme é uma das mais simples distribuições e é usada comumente em situações em que não há razão para atribuir probabilidades diferentes a conjuntos possíveis de valores da variável aleatória em determinado intervalo, Por exemplo, o tempo de chegada de um vôo pode ser considerado distribuído uniformemente em certo intervalo de tempo; a distribuição da distância de posição de cargas em uma ponte, em relação a um pilar terminal, também pode ser representada adequadamente por uma distribuição uniforme sobre o vão da ponte. Não é demais observar que, por vezes, associamos uma distribuição uniforme a determinada variável aleatória, simplesmente por falta de informação mais precisa além do conhecimento do seu intervalo de valores.

Função densidade de probabilidade [f(x)]

Uma variável aleatória possui distribuição uniforme em um dado intervalo se sua função densidade de probabilidade (f.d.p.) é dada por:

$$\int_a^b Kdx = 1, K(X)|_a^b = 1, (b-a)K = 1, K = \frac{1}{b-a}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)}, se\ a \leq X \leq b \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Função de distribuição ou de repartição $[F(X)]$

A função de distribuição é:

$$F(x) = \begin{cases} 0, se\ X < a \\ \dfrac{(X-a)}{(b-a)}, se\ a \leq X \leq b \\ 1, se\ b < X \end{cases}$$

Assim para dois números quaisquer c e d, teremos $P(c < x \leq d) = F(d) - F(c)$, que é obtida facilmente da função de distribuição.

Medidas características

A estimativa da média e da variância da distribuição uniforme são determinadas respectivamente por:

i) **Esperança matemática ou Média**

$$\boldsymbol{E(X) = \frac{(a+b)}{2}}$$

ii) **Variância:**

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Função geradora de momentos

$$\boldsymbol{m_x(t) = \frac{e^{bt} - e^{at} -}{(b-a)^t}, t \neq 0; \quad m_x(0) = 1}$$

Geração de números pseudoaleatórios

Ainda conforme MARTINS (2003), um número aleatório é uma variável aleatória que obedece às condições:

i) é uniformemente distribuída no intervalo que verifica as condições;

ii) uma sucessão destas variáveis revela independência estatística;

Também é comum designar por número aleatório o valor de uma variável aleatória nas condições acima.

Então, seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme entre a e b, $X \cap U(\mathrm{a,b})$. Então

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}, \text{ para } a \leq x \leq b$$

Ou seja

$$u = F(x)$$

$$u = \frac{x-a}{b-a}$$

$$x = a + (b-a)u$$

Portanto para gerar X, começa gerando um número aleatório U e toma-se:

$$X = a + (b-a)U$$

O gráfico da função densidade de probabilidade

O gráfico da função densidade de probabilidade da distribuição uniforme é mostrado na Figura 9.

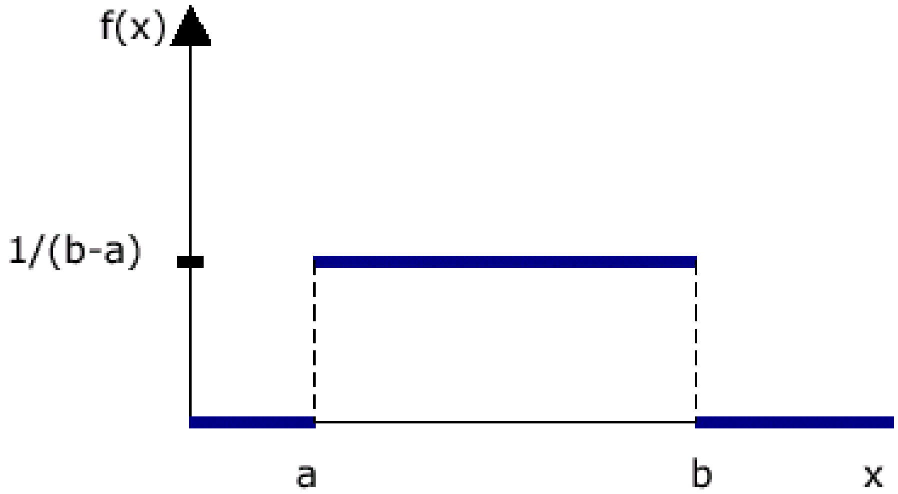


Figura 9. Função densidade de probabilidade da variável aleatória contínua uniforme.

O gráfico da função de repartição

O gráfico da Função de repartição é mostrado na Figura 10 abaixo:

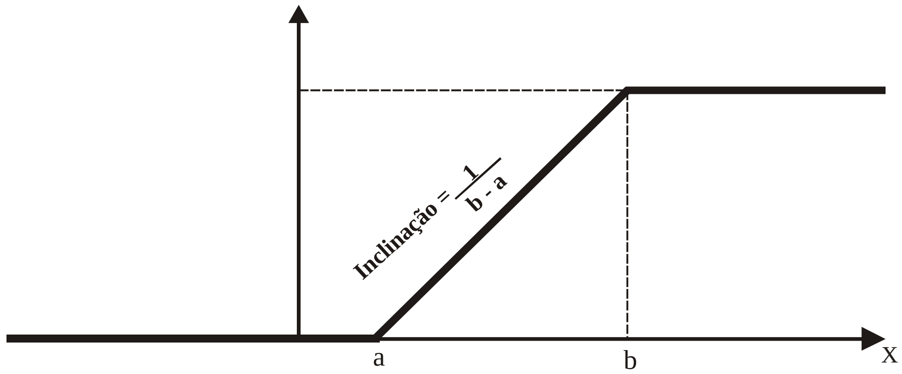


Figura 10. Gráfico representativo da distribuição de probabilidade acumulada ou função de repartição, da variável aleatória uniforme.

Exercícios de aplicação

1) Um ponto é escolhido ao acaso no segmento de reta $[0,2]$. a) Qual será a probabilidade de que o ponto escolhido esteja entre 1 e 1,5? b) Qual o valor da média e da variância de X?

Resposta:

i) $f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}, \rightleftarrows \quad para\ 0 \leq X < 2$

$$P(1 \leq X \leq 1{,}5) = \int_{1,0}^{0,5} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} X \rightleftarrows |_{1,0}^{1,5} \rightleftarrows = \frac{1}{4}\ (0{,}25) = 25\%$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{para } \ 0 \leq X \leq 2 \\ 0 & \text{se } \ X < 0 \quad \text{ou} \quad X > 2 \end{cases}$$

ii) $E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+2}{2} = 1$

$$\sigma^2_{(X)} = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(2-0)^2}{12} = 0{,}33$$

2) A dureza "H" de uma peça de aço pode ser pensada como sendo uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[50{,}70]$ da escala de "ROCKWEL". Calcular a probabilidade de que uma peça tenha dureza entre 55 e 60.

$$f(h) = \begin{cases} \frac{1}{20} & se \quad 50 \leq h \leq 70 \\ 0 & se \quad h < 50 \quad ou \quad h > 70 \end{cases}$$

$$f(55 \leq h \leq 60) = \int_{55}^{60} \frac{1}{20} dh = \frac{1}{20}(h)|_{55}^{60} = \frac{1}{20}(60-55) = \frac{1}{20}(5) = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$$

3) As variáveis aleatórias X e Y são independentes e têm distribuição uniforme no intervalo $[0{,}1]$. Determine a probabilidade de que o seu produto seja inferior a $\frac{1}{2}$.

Resposta: 0,847

4) Dez pontos acham-se distribuídos uniformes e independentemente no intervalo [0,1]. Determine:

i) A probabilidade de o ponto situado mais à direita estar à esquerda de $\frac{3}{4}$

Resposta: 0,056

ii) A probabilidade de o ponto contíguo àquele estar à direita de $\frac{1}{2}$

Resposta: 0,989

Distribuição de probabilidade Normal ou Gaussiana-N(μ, σ)

Generalidades

Essa distribuição é conhecida também como distribuição de Gauss ou Curva Gaussiana em honra ao maior matemático de seu tempo, o cientista alemão Karl Friedrich Gauss (1777-1855). Outras denominações são curvas de Laplace-Gauss, curva normal de probabilidades, curva normal dos erros.

O cientista "Abrahan De Moivre" (1667 – 1754) em 1733, desenvolveu a equação matemática e Gauss (1777-1855) em 1810 derivou sua equação partindo do estudo de erros em medidas repetidas de uma mesma medida na área da astronomia. Já o cientista Pierre Simon Laplace (1749 – 1827), usou o modelo em estudo no tratamento analítico de probabilidades.

Ou seja, o primeiro aparecimento dessa distribuição se deu, de forma indireta em 1733, numa discreta publicação posteriormente incluída na segunda edição da obra “Doctrine of Chances” do matemático francês Abraham de Moivre (1667 – 1754), que proppunha, nessa publicação, o uso da integral de e^{-X^2}, como forma de aproximação ao binômio $(a+b)^2$, com “n” suficientemente grande.

Grandes contribuições ao estudo da distribuição normal foram feitas pelo matemático francês Pierre Simon Laplace (1749 – 1827), através de sua obra máxima “Thèorie Analytique dês probabilités”, publicada em 1812. A Laplace, provavelmente, deve-se o resultado $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-X^2}\, dx = \sqrt{\pi}$, importantíssimo para o cálculo de áreas sob a curva normal.

Como Laplace, o matemático alemão Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855) tinha grande interesse nas aplicações da matemática aos estudos de astronomia. Assim, estudando erros de medida, Gauss encontrou uma forma matemática para modelagem desse erros partindo de algumas hipóteses consideradas “naturais”, entre elas a de que “o valor mais provável” de uma variável cujos valores fossem todos “dignos de confiança” era a média aritmética. A Gauss é creditada o uso pioneiro da função $f(X) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2X^2}$, como fórmula matemática para descrição probabilística dos erros de medida. Gauss ainda associava a h o valor $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$ (em notação moderna), dizendo que, através dele, se poderia ter uma idéia sobre a precisão das medidas.

É a mais importante distribuição de probabilidade de variável contínua em todo o campo da estatística tanto sob o ponto de vista teórico quanto nas aplicações práticas, dela derivando todos os procedimentos conhecidos como estatística paramétrica.

Seu gráfico conhecido como curva normal é uma curva de forma campanular que descreve de forma aproximada a distribuição de frequências ou de probabilidades da maioria dos dados ou variáveis de mensuração que ocorrem nas ciências físicas, biológicas e sociais, ou na natureza, na indústria e nas pesquisas de maneira geral, por exemplo, gramas, cm, ºC, etc.

É um modelo constantemente utilizado para o desenvolvimento de estudos estatísticos de inferência, salientando assim que a base da teoria estatística matemática está na distribuição normal. Dia a sua aproximação para outros modelos de distribuições teóricas de probabilidade.

São Exemplos de variáveis aleatórias contínuas que podem potencialmente ser modeladas pela distribuição normal ou Gaussiana, a Temperatura média diária em Mossoró-RN, a produção de soja no Mato Grosso, o peso de bezerros ao nascer, O rendimento leiteiro de um rebanho bovino, a pressão do globo ocular em gatos domésticos, o diâmetro em centímetros de árvores de eucaliptos, etc.

Função densidade de probabilidade $[\boldsymbol{f(x)}]$

Uma variável aleatória contínua é normal ou Gaussiana, se sua função densidade de probabilidade (f.d.p.) tem a forma.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty$$

Onde, $e = 2{,}7183$; $\pi = 3{,}1416$, $X \in \mathbb{R}$, μ é a média da distribuição (parâmetro de localização), σ é o desvio padrão da distribuição (parâmetro de escala) (σ > 0). A distribuição normal é caracterizada pelos parâmetros μ, σ^2 que são respectivamente sua média e variância, com $\sigma^2 > 0$.

i) Média:

Pela definição

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} Xf(X)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} X \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Fazendo $\frac{(X-\mu)}{\sigma} = t$, obtém-se $X = \sigma t + \mu \ e \ dx = \sigma dt$ com $-\infty < t < +\infty$. Assim.

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + \mu) e^{\frac{-t^2}{2}-t^2} \sigma dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{\frac{-t^2}{2}} dt + \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

Desdobrando a primeira integral nos limites $(-\infty, 0) \ e \ (0, +\infty)$ e substituindo-se numa delas t por –w, facilmente se comprova que ela é igual a 1, pois corresponde à área sob a curva normal quando $\sigma = 1 \ e \ \mu = 0$.

Dessa forma,

$$E(X) = \mu$$

ii) Variância:

$$V(X) = E(X - \mu_X)^2 = E(X-\mu)^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (X-\mu)^2 e^{\frac{-(X-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Através da transformação linear $\frac{(X-\mu)}{\sigma} = t$. Obtém-se:

$$V(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Fazendo $\frac{t^2}{2} = W$, obtém-se $dw = tdt \ e \ t = \sqrt{2} W^{\frac{1}{2}}$ com $0 < \ W < +\infty$. Assim temos que:

$$V(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} 2 \int_{0}^{+\infty} \sqrt{2} W^{\frac{1}{2}} e^{-W} dw = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} 2 \int_{0}^{+\infty} W^{\frac{1}{2}} e^{-W} dw$$

Mas como $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} X^{\alpha-1}\, e^{-X} dx$, e, portanto, $\alpha - 1 = \frac{1}{2}\ ou\ \alpha = \frac{3}{2}$. Assim,

$$\int_0^{+\infty} W^{\frac{1}{2}} e^{-W} dw = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Logo temos que, $V(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ou ainda, $V(X) = \sigma^2$.

Sendo assim, o parâmetro μ a qual é a média e o ponto central da distribuição normal. Já o parâmetro σ é a raiz quadrada positiva da variância σ^2, ou seja, é o desvio padrão. o parâmetro σ, portanto, determina o formato da distribuição e deve obrigatoriamente ser finito.

Notação usada:

$X \frown N(\mu, \sigma^2) ou X \sim N(\mu, \sigma^2)$: isso significa que a variável aleatória contínua X tem ou possui distribuição normal de média μ e variância $\sigma 2$.

Determinação ou cálculo de áreas ou probabilidades

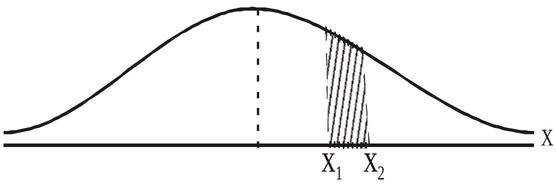


Figura 11. Área sob a curva da distribuição normal.

$$P(x_1 \ \leq x \leq x_2) \ = \ \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{dx} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \ . \ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2} \ \mathrm{dx} =$$

Devido os cálculos das áreas ou probabilidades, serem bastante trabalhosos, isto porque a integração de $f(x)$ que só pode ser resolvida de modo aproximado e por métodos numéricos (e não analiticamente) e também, principalmente porque para se elaborar uma tabela de probabilidades ser uma tarefa muito trabalhosa, haja vista que para cada intervalo x_1 e $x2$, teríamos que integrar para cada combinação dos dois parâmetros (ou números) μ e σ^2, e para isso no cálculo de probabilidades deveria ser consideradas várias combinações de μ e σ. Foi devido a isso que procurou-se padronizar a variável por meio de uma mudança na variável x para a z, obtendo-se assim, a distribuição normal padronizada ou reduzida $[f(z)]$.

Distribuição normal padronizada ou reduzida $[\boldsymbol{f(z)}]$

Fazendo $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$, temos que $E(z) = 0\ e\ v(z) = 1$, senão vejamos,

$$E[Z] = E\left[\frac{x - \mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma}[E(x - \mu)] = \frac{1}{\sigma}[E(x) - E(\mu)] = \frac{1}{\sigma}[\mu - \mu] = \frac{1}{\sigma} \cdot 0 = 0$$

$$V(z) = V[\frac{x - \mu}{\sigma}] = \frac{1}{\sigma^2}[V(x - \mu)] = \frac{1}{\sigma^2}[V(x - \mu)] = \frac{1}{\sigma^2}[V(X) - V(\mu)]$$

$$V(z) = V[\frac{x - \mu}{\sigma}] = \frac{1}{\sigma^2}[\sigma^2 - 0] = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

$$\sigma_Z = \text{D.P.} = \sqrt{1} = 1$$

Temos que:

$$\text{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{e}^{-\frac{1}{2}Z^2}, \ -\infty \leq Z \leq \infty$$

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = P(z_1 \leq z \leq z_2) = \int_{Z_1}^{Z_2} f(z)\text{dz} = \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dz$$

onde Z é o número de desvios padrões a contar da média

x é o valor arbitrário

μ é a média da distribuição normal

σ é o desvio padrão da distribuição normal

Para se usar a distribuição Gaussiana para representar o conjunto de dados é necessário ajustar os dois parâmetros da distribuição aos dados. Boas estimativas destes parâmetros são obtidas utilizando-se o método dos momentos. O primeiro momento seria a média, μ, e o segundo momento é a variância, σ^2. Portanto, podemos estimar μ como uma média simples e σ como o desvio-padrão.

Se os valores de uma amostra de dados seguem aproximadamente uma distribuição Gausssiana, então a estimativa desses parâmetros irá fazer com que a $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$ se comporte exatamente como os dados. Praticamente, contudo, a integração analítica de $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$ é impossível, tal que a fórmula para a função de repartição ou de distribuição ou de probabilidade acumulada (CDF) que é F(x) para a distribuição Gaussiana não existe.

Assim, as probabilidades Gaussianas são obtidas de 2 formas:

1) Se as probabilidades são necessárias como parte de um programa de computador, a integral da $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$ pode ser resolvida por algoritmos como os descritos em ABROMOWITZ E SEGUN (1984).e em PACITTI(1974).
2) Se apenas algumas probabilidades são necessárias, então podemos fazer uso de tabelas para calculá-las (Essas tabelas são encontradas na maioria dos apêndices dos livros de estatística)

Em ambos casos, uma transformação dos dados será requerida. Isto porque as tabelas de distribuição de probabilidade e algoritmos dizem respeito à distribuição Gaussiana "padrão", ou seja, aquela que tem $\mu = 0$ e $\sigma = 1$. Convencionalmente como já mostrado anteriormente, a variável aleatória descrita por uma distribuição Gaussiana padrão é denominada de Z. Sua densidade de probabilidade se simplifica a:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(Z)^2}{2}\right]$$

Qualquer variável Gaussiana aleatória, X, pode ser transformada para uma forma padrão Z (ou, como dizemos usualmente, pode ser padronizada) subtraindo-se sua média e dividindo-se pelo seu desvio padrão.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Quando estimamos os coeficientes da Gaussiana pelos dados, então utilizamos a seguinte notação (notem que agora a variável transformada é denotada como z):

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

uma informação importante é a de que z é adimensional, e chamamos também z de anomalia padronizada e terá, portanto, média zero e desvio padrão $s = 1$. contudo o dado transformado não seguirá a distribuição gaussiana, a menos que a variável sem ser transformada seguir.

PACITTI, 1974, Mostra que, para se evitar grande volume de trabalho de computação no cálculo da integração da função da distribuição normal padrão, utiliza-se um polinômio que aproxima a função com boa precisão. Este polinômio é o apresentado a seguir:

$$F(Z) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(\frac{-Z^2}{2}\right)(a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + at^4 + at^5)$$

Essa expressão vale para $Z \geq 0$, já que para $Z < 0$ tem-se $F(Z) = 1 - F(-Z)$. Em que

$$t = \frac{1}{(1 + kZ)}; \quad k = +\ 0{,}2316419; \quad a_1 = +0{,}31938153; \ a_2 = -0{,}356563782; \ a_3 = +1{,}781477937;$$

$$a_4 = -1{,}821255978; \ a_5 = +1{,}330274429$$

e Z é a variável reduzida ou transformada de x, isto é:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Notação usada para distribuição normal padrão

$Z \cap N\ (0{,}1)$: Z tem distribuição normal com média o e variância 1.

Gráficos da curva normal e normal padrão.

O gráfico da distribuição densidade de probabilidade Normal tem um formato de sino, campânula, chapéu de Napoleão, ou pano de circo, como é mostrado na Figura 12, abaixo.

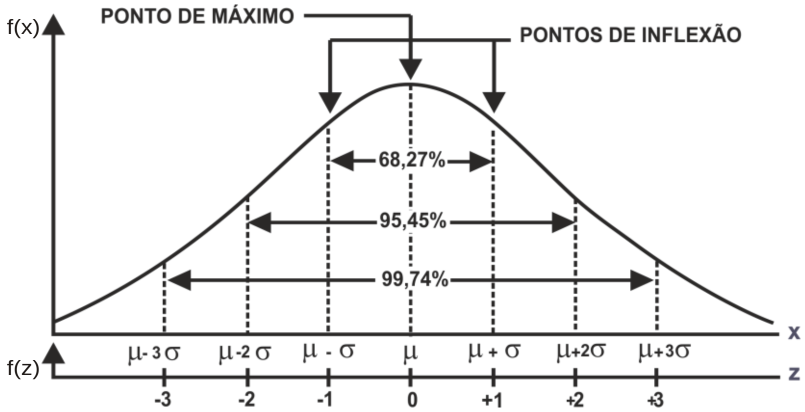


Figura 12. Gráfico representativo da distribuição normal $[f(x)]$ e normal padrão $[f(z)]$.

Propriedades da distribuição normal

i) O coeficiente de assimetria é igual a zero, ou seja, é a curva é simétrica, isto é $\gamma_1 = a_3 = 0$ (coeficiente de assimetria);

Vejamos como obter o coeficiente de assimetria.

Tem-se que:

$$a_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

e

$$\mu_3 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(X-\mu)^3 e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^3 t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt$$
$$= \frac{\sigma^3}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \int_{0}^{+\infty} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt\right]$$

Substituindo-se numa das integrais, t por $-W$, verifica-se facilmente que $\mu_3 = 0$. Sendo assim, $a_3 = 0$.

ii) Tem forma de sino ou campunular, sendo simétrica em relação a $x = \mu$ ou $z = 0$, isto é $\gamma_1 = 0$ (coeficiente de assimetria);

Como foi visto anteriormente, na distribuição normal se tem o coeficiente de assimetria igual a zero isto é, $a_3 = 0$, ou seja, a distribuição é simétrica. Além disso, fazendo $Y = X - \mu$, tem-se que:

$$f(Y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Y^2}{2\sigma^2}}$$

e para $-Y = -X + \mu$, tem-se que:

$$f(-Y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(-Y)^2}{2\sigma^2}} = f(Y)$$

Ou seja, $f(X-\mu) = F(\mu - X)$, sendo μ o ponto de simetria.

iii) A distribuição é mesocúrtica, isto é, o coeficiente de curtose é igual a três $\gamma_2 = 3$;

Como se sabe o coeficiente de curtose é dado por: $a_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$ e que

$$\mu_4 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(X-\mu)^4 e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Mas se $t = \frac{(X-\mu)}{\sigma}$, $(X-\mu)^4 = t^4\sigma^4$, $dx = \sigma dt \quad e \quad -\infty < t < +\infty$. Sendo assim temos que:

$$\mu_4 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^4 t^4 e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt = \frac{\sigma^4}{\sqrt{2\pi}}2\int_{0}^{+\infty} t^4 e^{-\frac{t^2}{2}}tdt$$

Se considerarmos que: $\frac{t^2}{2} = W$, $t = \sqrt{2}W^{\frac{1}{2}}$, $t^3 = 2^{\frac{3}{2}}W^{\frac{3}{2}}$, $tdt = dw \quad e \quad 0 < W < +\infty$, então,

$$\mu_4 = \frac{\sigma^4}{\sqrt{2\pi}}2\cdot 2^{\frac{3}{2}}\int_{0}^{+\infty} W^{\frac{3}{2}}e^{-W}dw$$

Sendo que: $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} W^{\alpha-1}e^{-W}dw$, tem-se que $\alpha - 1 = \frac{3}{2} \quad e \quad \alpha = \frac{5}{2}$

Como

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) == \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)\sqrt{\pi}$$

obtém-se:

$$\mu_4 = \frac{\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} 2.2\sqrt{2}\frac{3}{4}\sqrt{\pi} = 3\sigma^4,$$

Logo temos, $a_4 = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} = 3$

Sendo assim, a distribuição normal é mesocúrtica e possui $a_4 = 3$. O valor 3 serve de padrão ou referência para a determinação do grau de achatamento das outras distribuições.

iv) Tem um máximo no ponto $x = \mu$, ou seja a moda é igual a μ e o valor da ordenada máxima é $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;

Como $f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, e a derivada primeira dessa função é dada por:

$$f'(X) = f(X)\left(-\frac{(X-\mu)}{\sigma^2}\right)$$

Fazendo-se $f'(X) = 0$ e sendo $f(X) > 0$, tem-se, necessariamente que:

$$\left(-\frac{(X-\mu)}{\sigma^2}\right) = 0$$

Ou seja, $X = \mu''$ e a raiz da derivada primeira. Tomando-se a derivada segunda assim:

$$f''(X) = -\frac{1}{\sigma^2} f(X) + \left(-\frac{(X-\mu)}{\sigma^2}\right)^2 f(X) = -\frac{1}{\sigma^2} f(X)\left(1 - \frac{(X-\mu)}{\sigma}\right)^2$$

Logo, $f''(X) = -\frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}} < 0$; portanto, $X = \mu$ é o ponto de máximo. Essa propriedade e a anterior podem ser resumidas da seguinte maneira: na distribuição normal os valores da média, da mediana e da moda são iguais, que é a propriedade cinco "v" abaixo.

v) As três medidas ou parâmetros de posição, tendência central ou de localização (média, mediana e moda) se igualam no ponto de máximo da curva, isto é $\mu = M_d = M_O$ em $x = \mu$ ou $z = 0$;

vi) Tem dois pontos de inflexão cujas abscissas valem $X_1 = \mu + \sigma$ e $X_2 = \mu - \sigma$, cujos pontos são: $\left[(\mu-\sigma); \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right]$ e $\left[(\mu+\sigma); \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right]$

Tomando-se $f''(X) = 0$, obtém-se:

$$\frac{1}{\sigma^2} f(X) \left[\left(\frac{(X-\mu)}{\sigma} \right)^2 - 1 \right] = 0$$

Como $f(X) > 0$ para todo x e $\sigma^2 > 0$, tem-se que

$\left[\left(\frac{(X-\mu)}{\sigma} \right)^2 - 1 \right] = 0$ ou $\left(\frac{(X-\mu)}{\sigma} \right) = \pm 1$, donde $\mu - \sigma\ e\ \mu + \sigma$ são as raízes da derivada segunda.

Derivando-se novamente a função $f''(X)$, pode-se ver que $\mu - \sigma\ e\ \mu + \sigma$ não anulam $f^3(X)$; logo, são pontos de inflexão.

vii) A área total compreendida pela curva e o eixo dos x é igual a 1 ou 100%.

viii) A curva é assintótica em relação ao eixo das abscissas. À medida que cresce ou decresce o valor de x, decresce o valor de y sem chegar a zero. Isto quer dizer que ambos extremos da curva se aproximam do eixo horizontal sem chegar a tocá-lo ou seja

$$\lim_{X \to \pm\infty} f(x) = 0$$

ix) A Distribuição fica perfeitamente definida se conhecermos a média μ e o desvio padrão σ, isto é, somente com estes parâmetros estatísticos pode-se calcular a altura da curva em qualquer ponto do eixo horizontal;

x) A área sob a curva entre dois pontos é a probabilidade de uma variável normalmente distribuída tomar um valor entre esses pontos. As probabilidades referem-se sempre a intervalos;

xi) Na distribuição normal as seguintes áreas são observadas sob a curva da distribuição:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}6827,\ P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}9544,$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}9927,\ etc...$$

Considerando-se, então,$A = [\mu - \sigma; \mu + \sigma]$, tem-se que:

$$P(A) = \int_A f(X)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

Fazendo-se $t = \frac{(X-\mu)}{\sigma},\ dx = \sigma dt,\quad -1 < t < +1$

$$P(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+1} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

Desenvolvendo-se $e^{-\frac{t^2}{2}}$ como uma série de potências, obtém-se o seguinte:

$$P(A) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4.2!} - \frac{t^6}{8.3!} + \frac{t^8}{16.4!} \pm \cdots \right) dt$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{40} - \frac{t^7}{336} + \frac{t^9}{3456} \pm \cdots \right) \Big|_0^1$$

ou seja, $P(A) = 0{,}6827$ se for feita a aproximação até o quinto termo. O erro cometido será sempre menor que o módulo do primeiro termo abandonado. Sendo assim, temos que:

$$e < \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{t^{10}}{3840} \right|$$

E para $t = 1, e < 0{,}00021$. Para obtenção de $P(A)$, sendo $A = [\mu - K\sigma; \mu + K\sigma]$, Fica como a seguir:

$$P(A) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{40} - \frac{t^7}{336} + \frac{t^9}{3456} \pm \cdots \right) \Big|_0^K$$

Deve-se considerar, entretanto, que, quanto maior é o valor de K, maior será o número de termos necessários para uma aproximação razoável.

Essa propriedade particulariza, para o caso da distribuição normal, a importante relação ou teorema de Thebycheff, visto no Capítulo 2 deste livro, de acordo com o qual é sempre possível associar uma proporção de observações de uma variável aleatória a um intervalo que contenha a média e o desvio padrão.

Função Geradora de Momentos

A função geradora de momentos é dada por $m_x(t) = \exp\left[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right]$

Cálculo de áreas ou probabilidades sob a curva normal padrão: uso da tabela de probabilidades

A probabilidade ou a área de que uma variável aleatória "x" contínua normal assuma um valor entre $X = x_1$ e $X = x_2$ é dada por:

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx,$$

A qual está representada pela área hachurada da Figura 13 abaixo.

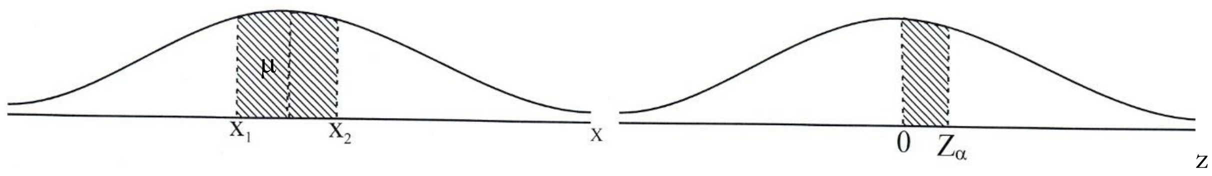


Figura 13. Gráficos de áreas sob a curva da distribuição normal e normal padrão.

Trabalhando com a variável aleatória z, temos que: se x está entre os valores $x = x_1$ e $x = x_2$, a variável aleatória z estará entre os valores,

$$Z_1 = \frac{(x_1 - \mu)}{\sigma} \quad \text{e} \quad Z_2 = \frac{(x_2 - \mu)}{\sigma},$$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(z_1 \leq z \leq z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, . \, e^{-\frac{1}{2}(z)^2} \, dz,$$

Neste caso podemos encontrar a probabilidade ou área através da tabela que dá a área compreendida entre 0 e Z_c.

A tabela da $F(z)$ para pontos da metade direita da distribuição somente, isto é para $z \geq 0$. Os valores de áreas correspondentes para $z < 0$ se obtêm, em decorrência da simetria da distribuição normal. Isto é $F(-z) = 1 - F(z)$.

Função de distribuição de probabilidade $[\boldsymbol{F(x)}, \textbf{ou } \boldsymbol{F(z)}]$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u - \mu}{\sigma}\right)^2} \, du, \; -\infty < x < \infty$$

A integral acima não pode ser expressa analiticamente em termos finitos, mas pode ser calculada numericamente para quaisquer x.

Gráfico da função de repartição ou da função de distribuição ou da distribuição de probabilidade acumulada $F(x)$, com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

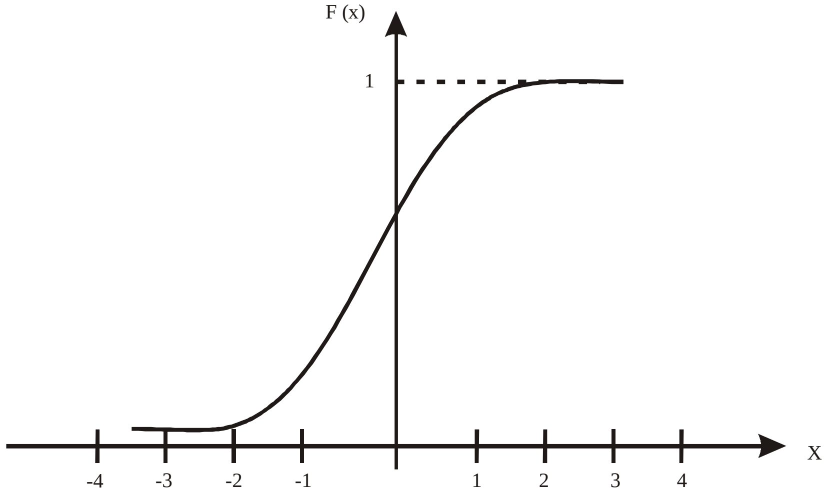


Figura 14. Gráfico da distribuição de probabilidade acumulada da distribuição normal.

Exercícios de Aplicação

1) Use a tabela da curva normal para calcular a área sob a curva normal entre os seguintes pontos:

i) $Z = 0{,}00$ e $Z = 1{,}20$, $P(0{,}00 \leq Z \leq 1{,}20) = 0{,}3849$

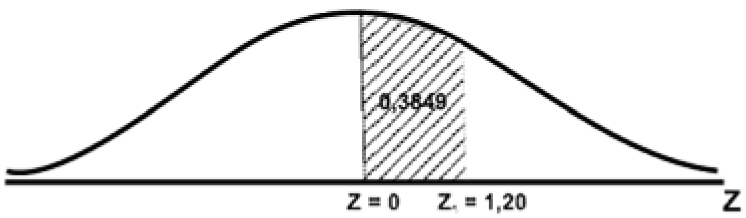


Figura 15. Área sob a curva normal padrão entre 0,00 e 1,20.

ii) $Z = -0{,}90$ e $Z = 0{,}00$, $P(-0{,}90 \leq Z \leq 0{,}00) = 0{,}3159$

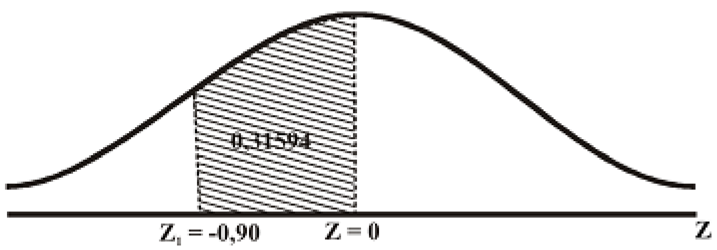


Figura 16. Área sob a curva normal padrão entre -0,90 e 0,00.

iii) $Z = 0{,}00$ e $Z = 0{,}75$, $P(0 \leq Z \leq 0{,}75) = 0{,}2734$

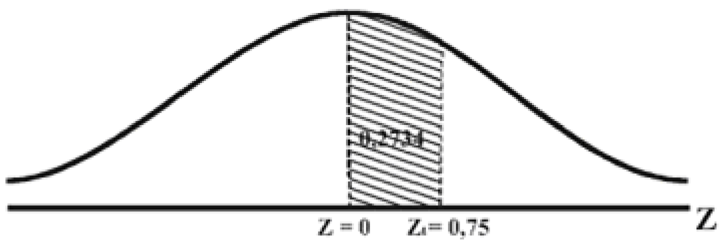


Figura 17. Área sob a curva normal padrão entre 0,00 e 0,75.

iv) $Z = -0{,}20$ e $Z = 0{,}20$

$$P(-0{,}20 \leq Z \leq 0{,}20) = P(-0{,}20 \leq Z \leq 0{,}00) + P(0{,}00 \leq Z \leq 0{,}20)$$

$$P(-0{,}20 \leq Z \leq 0{,}20) = 2.P(0{,}00 \leq Z \leq 0{,}20) = 2x\ 0{,}0793$$

$$P(-0{,}20 \leq Z \leq 0{,}20) = 0{,}1586.100$$

$$P(-0{,}20 \leq Z \leq 0{,}20) = 15{,}86\%$$

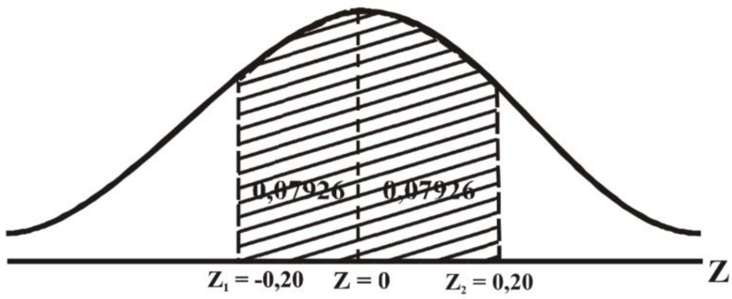


Figura 18. Área sob a curva normal padrão entre -0,20 e 0,20.

v) $P(Z \leq 1{,}35) = 0{,}5000 + P(0 \leq Z \leq 1{,}35) = 0{,}5000 + 0{,}4115 = 0{,}9115$

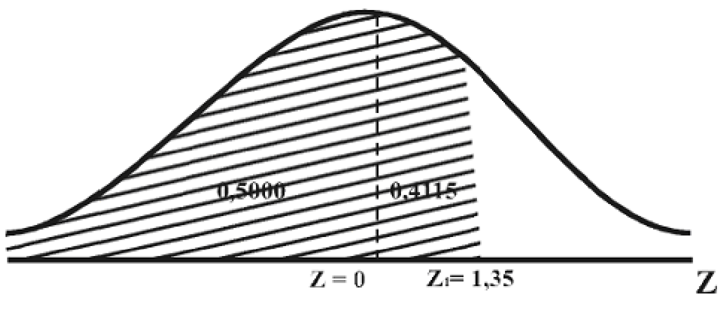


Figura 19. Área sob a curva normal padrão inferior a 1,35.

vi) $P(-0{,}20 \leq Z \leq 1{,}83) = P(-0{,}20 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1{,}83) = 0{,}0793 + 0{,}4664 = 0{,}5457$

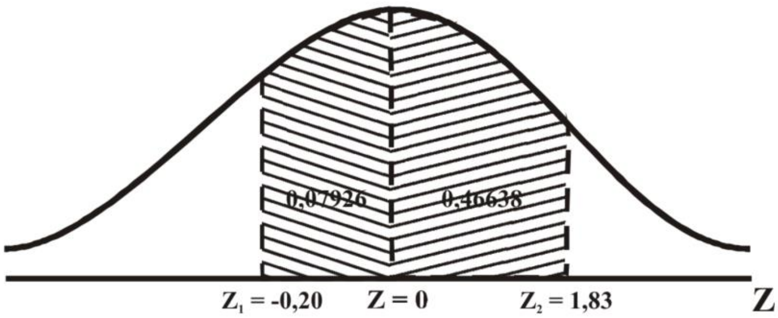


Figura 20. Área sob a curva normal padrão entre -0,20 e 1,83.

vii) $P(Z \geq 1{,}44) = 0{,}5000 - P(0 \leq Z \leq 1{,}44) = 0{,}5000 - 0{,}4251 = 0{,}0749$

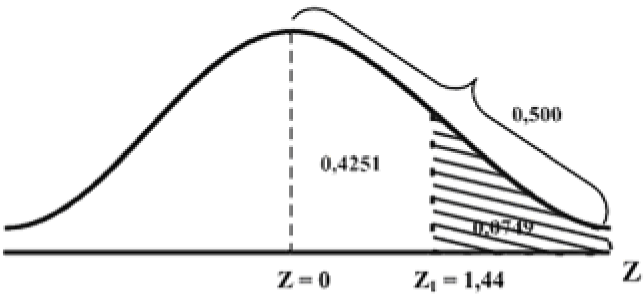


Figura 21. Área sob a curva normal padrão entre 0,00 e 1,44.

viii) $\mathrm{P}(-1{,}48 \leq Z \leq 1{,}48) = \mathrm{P}(-1{,}48 \leq Z \leq 0) + \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1{,}48) \mathrm{P}(-1{,}48 \leq Z \leq 1{,}48) = 2 \cdot \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1{,}48) = 2 \cdot 0{,}4306 = 0{,}8612$

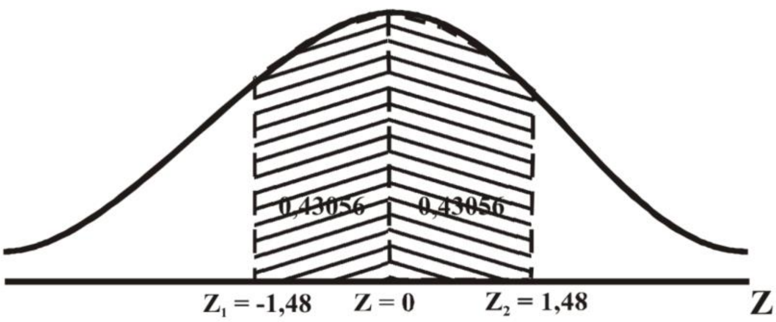


Figura 22. Área sob a curva normal padrão entre -1,48 e 1,48.

ix) $P\ (1{,}30 \leq Z \leq 1{,}74)$

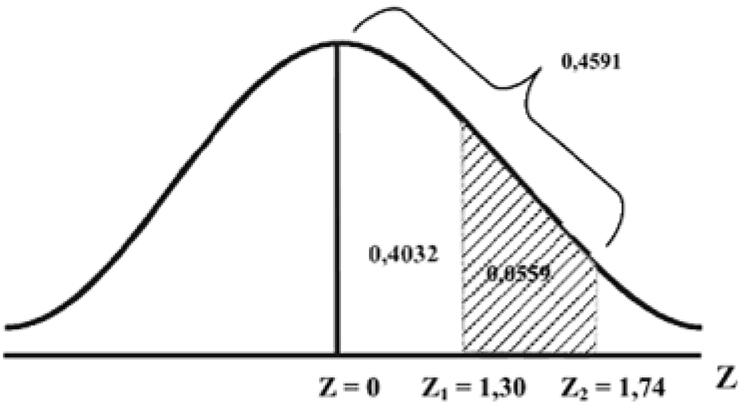


Figura 23. Área sob a curva normal padrão entre 1,30 e 1,74.

$$P\ (1{,}30 \leq Z \leq 1{,}74) = \ P(0 \leq Z \leq 1{,}74) - P(0 \leq Z \leq 1{,}30)$$

$$P\ (1{,}30 \leq Z \leq 1{,}74) = \ 0{,}4591 - 0{,}4032$$

$$P\ (1{,}30 \leq Z \leq 1{,}74) = \ 0{,}0559$$

$$P\ (1{,}30 \leq Z \leq 1{,}74) = \ 5{,}59\%$$

2) Supondo que x seja uma variável aleatória contínua normalmente distribuída com média $\mu\ =\ 10$ e desvio padraõ $\sigma^2\ =\ 4$. a) Qual a probabilidade de x assumir um valor entre 8 e 12; b) Qual é o valor de x que deixa 5% de área acima dele.

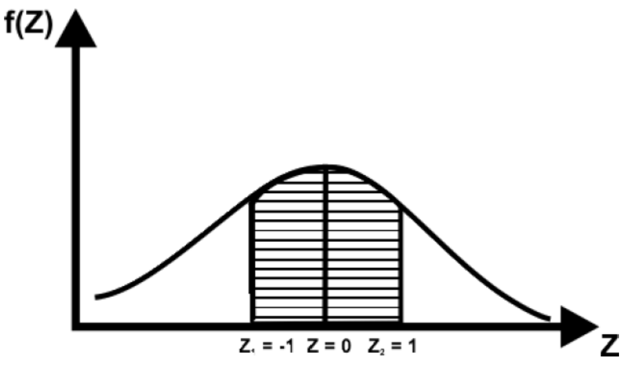


Figura 24. Área sob a curva normal padrão entre -1,00 e 1,00.

i) $P(8\ <\ x\ <\ 12)\ =\ P(-1\ <\ Z\ <\ 1)\ =\ 2\,.P(0\ <\ Z\ <\ 1)\ =\ 2\ x\ 0{,}3413\ =\ 0{,}6826$

$$Z_1\ =\ \frac{8 - 10}{\sqrt{4}} = -1$$

$$Z_2 = \frac{12 - 10}{\sqrt{4}} = 1$$

ii) $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}, x = Z\sigma + \mu \therefore x = \mu + Z\sigma$

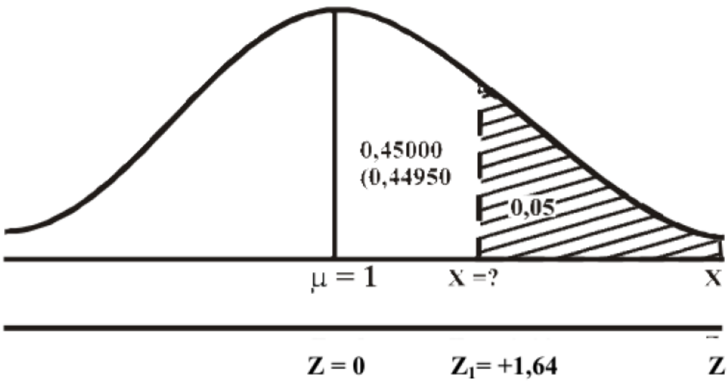


Figura 25. Área sob a curva normal padrão acima de 1,64.

$$X = 10 = (+1{,}64)\ (2) = 13{,}28$$

3) Exemplos para uso da tabela da curva normal padrão

a) $P(0 \leq Z \leq 1) =$
b) $P(-2{,}55 < Z < 1{,}20) =$
c) $P(Z \geq 1{,}93) =$
d) $P(1{,}30 \leq Z \leq 1{,}74) =$

Então as respostas são as seguintes:

i) Entre 0,00 e 1,00

$$P(0 \leq Z \leq 1) = 0{,}3413$$

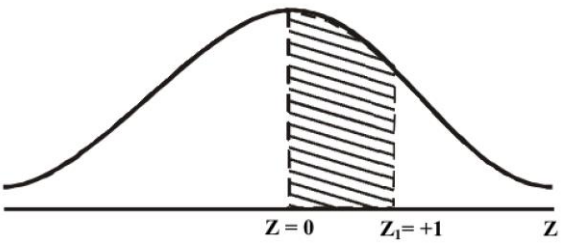


Figura 26. Área sob a curva normal padrão entre 0,00 e 1,00.

ii) Entre -2,55 e +1,20

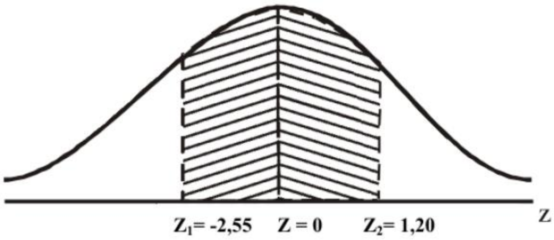


Figura 27. Área sob a curva normal padrão entre -2,55 e 1,20.

Entrar com 1,20 na 1ª coluna e 0,00 na 1ª linha. Lembrando a propriedade da simetria em relação a $Z = 0$, entraremos com 2,5 na 1ª linha e 0,05 na primeira linha, obtendo 0,4946, portanto:

$$P(-2{,}55 < Z < 1{,}20) = 0{,}3849 + 0{,}4946 = 0{,}8795$$

iii)

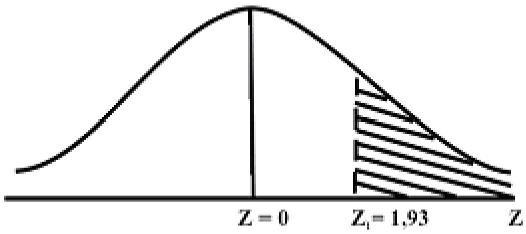


Figura 28. Área sob a curva normal padrão acima de 1,93.

Entramos com 1,90 na 1ª coluna e 0,03 na 1ª linha obtendo 0,4732. Porém essa é a área entre 0 e 1,93. Lembrando que a área embaixo da curva vale 1 e que a função é simétrica em relação à origem Z = 0.

$$P(Z > 1{,}93) = 0{,}5000 – 0{,}4732 = 0{,}0268$$

iv) $P(1{,}30 < z < 1{,}74) = P(0 \leq Z \leq 1{,}74) - P(0 \leq Z \leq 1{,}30) = 0{,}4591 - 0{,}4032 = 0{,}0559$

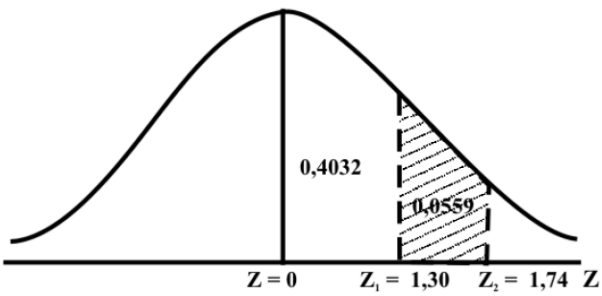


Figura 29. Área sob a curva normal padrão entre 1,30 e 1,74.

4) O peso ao nascer de bezerros da raça bovina guzerá distribui-se normalmente com média $\mu = 27{,}0$ kg e desvio padrão $\sigma = 1{,}2\ kg$.

i) Determinar a probabilidade (área) ou a porcentagem de bezerros que pesam.

i.1) Mais que 28 kg

i.2) Entre 26,0 e 27,5 kg

i.3) Menos que 26,0 kg

i.4) Acima da média μ = 27,00 kg

ii) Qual deve ser o peso médio dessa raça para que apenas 10% dos animais tenham menos de 25 kg de peso? (Isto é, sabe-se que 10% dos pesos são inferiores a 25 kg).

iii) Num exame de um rebanho com n = 200 animais dessa raça, quantos são esperados (n') com peso acima de 28 kg?

iv) Quais as abscissas dos pontos de inflexão? O que significam?

v) Qual é a probabilidade de um peso diferir da média de mais da metade do desvio padrão?

vi) Qual é o peso (x) que delimita os 5% mais pesados?

Aproximação da distribuição Binomial através da distribuição Normal: (aproximação de Moivre-Laplace)

Generalidades

Se n é grande e nem p nem q são demasiadamente próximos de zero, a distribuição binomial pode ser satisfatoriamente aproximada por uma distribuição normal com variável aleatória padronizada, dada por

$$Z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$$

Aqui x é a variável aleatória que dá o número de sucessos em n provas de Bernoulli e p a probabilidade de sucesso. A aproximação melhora com o crescer de n e é exata no caso limite. Na prática, a aproximação é muito boa, se np e nq são ambos maiores que 5. Pode-se descrever o fato de a distribuição binomial tender para a distribuição normal, escrevendo

$$\lim_{n \to \propto} P\left(a \leq \frac{x - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-4\frac{2}{2}} du$$

Em palavras a variável aleatória padronizada $\frac{(x - npq)}{\sqrt{npq}}$ é assintoticamente normal.

A justificativa formal de tal aproximação é dada pelo chamado teorema do limite central. Outros autores descrevem que a aproximação normal da distribuição binomial (aproximação de Moivre-Laplace). Quando n é grande e p está próximo de ½. Mesmo quando n é pequeno e p não está extremamente próximo de zero ou um, a aproximação é razoavelmente boa. Ou melhor

$$Z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}} \therefore \text{ d - N } (\mu = 0; \sigma = 1) \text{ , quando } n \to \infty$$

onde $\mu = np$ e $\sigma = \sqrt{npq}$

$$n \geq 30$$

$$np > 5$$

$$nq > 5$$

Condições a serem satisfeitas:

i) $n \geq 30$ $(n \to \infty)$

ii) P próximo de $1/2$

iii) $np > 5$ e $nq > 5$

Variável aleatória padronizada:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{x - np}{\sqrt{npq}} \text{ d - N}[\mu = 0; \sigma = 1] \cap \text{N}(0,1)$$

$$\text{onde, } \begin{cases} \mu = np \\ \sigma = \sqrt{npq} \end{cases}$$

Probabilidades solicitadas (correção de continuidade)

$$P(x = k) \underset{\text{c.c.}}{\cong} P(k - \frac{1}{2} \leq x \leq k + \frac{1}{2})$$

$$P(a \leq x \leq b) \underset{c.c.}{\cong} P\left(a - \frac{1}{2} \leq x \leq b + \frac{1}{2}\right)$$

$$P(x \geq a) = P(x \geq a - \frac{1}{2})$$

$$P(x < a) = P(x < a - \frac{1}{2})$$

$$P(x \leq a) = P(x \leq a + \frac{1}{2})$$

$$P(x > a) = P(x > a + \frac{1}{2})$$

É importante destacar que a primeira referência à distribuição normal apareceu no trabalho de "De Moivre", em 1733, como processo de aproximação de probabilidades de uma distribuição binomial quando n é grande.

Exercício de Aplicação

Uma moeda honesta é lançada 100 vezes. Qual é a probabilidade de que o número de caras pertença ao intervalo fechado [48, 52]?

$n = 100 \; P(48 \leq x \leq 52)$ a Probabilidade atribuída a 48 será distribuída no int. $[47{,}5, 48{,}5]$ do qual 48 é o ponto médio.

$$p = \frac{1}{2}$$

$$\mu = 100\frac{1}{2} = 50$$

$$V(x) = 100 \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{2} = 25, Z_1 = \frac{47{,}5 - 50}{5} = 0{,}5, \;\; Z_1 = \frac{52{,}5 - 50}{5} = +0{,}5$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{25} = 5$$

$$P(48 \leq x \leq 52) = P(47{,}5 \leq x \leq 52{,}5) = P\left[\frac{-2{,}5}{5} \leq x \leq \frac{2{,}5}{5}\right] = P[-0{,}5 \leq z \leq 0{,}5]$$

$$P(-0{,}50 \leq z \leq +0{,}50) = 2.P.[Z \leq 0{,}50] = 2 \,.\, 0{,}1915 \simeq 0{,}3830$$

$$P(-0{,}50 \leq z \leq +0{,}50) = P(-0{,}50 \leq z \leq 0) = +P(0 \leq z \leq 0{,}50) = 2\,x\,P(0 \leq z \leq 0{,}50)$$
$$= 2\,x\,0{,}1915 \simeq 0{,}383 = 38{,}3\%$$

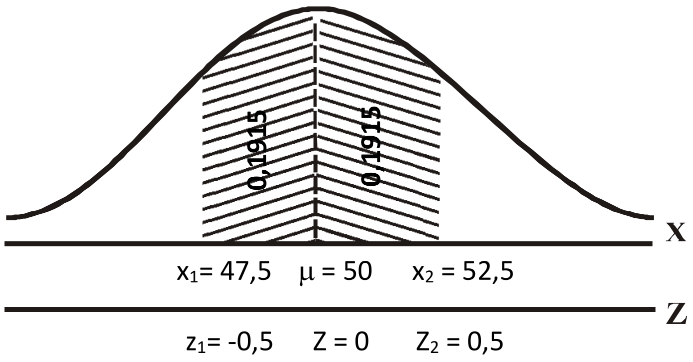


Figura 30. Área sob a curva normal padrão entre -0,50 e 0,50.

Aproximação da distribuição de Poisson através da distribuição Normal

Generalidades

Pode-se mostrar que se X é a variável de Poisson e $\frac{(x - \lambda)}{\sqrt{\lambda}}$ é a correspondente variável aleatória padronizada, então

$$\lim_{\lambda \to \infty} P\left(a \leq \frac{x - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-4\frac{2}{2}} \, du$$

Isto é a distribuição de Poisson tende para a distribuição normal quando $\lambda \to \infty$ ou seja, $\frac{x - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ é assintoticamente normal.

Condições a serem satisfeitas

i) Quando a média lambda tiver os seguintes valores: $\lambda \geq 5, \lambda \geq 10, \lambda \geq 15, \lambda = \mu \geq 10$ ou $\lambda \to \infty$;

ii) Variável aleatória padronizada

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{x - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \sim N(0,1),$$

$$\text{onde } \begin{cases} \mu = \lambda \\ \sigma = \sqrt{\lambda} \end{cases}$$

Probabilidades solicitadas (correção de continuidade)

i) $P(x = k) \cong P(k - \frac{1}{2} \leq x \leq k + \frac{1}{2})$

ii) $P(a \leq x \leq b) \cong P(a - \frac{1}{2} \leq x \leq b + \frac{1}{2})$

iii) $P(x \geq a) = P(x \geq a - \frac{1}{2})$

iv) $P(x < a) = P(x < a - \frac{1}{2})$

v) $P(x \leq a) = P(x \leq a + \frac{1}{2})$

vi) $P(x > a) = P(x > a + \frac{1}{2})$

Exercício de Aplicação

Em uma agroindústria de beneficiamento de castanha de caju localizada em Mossoró, RN, acontecem em média 0,6 acidentes de trabalho por dia, e o número de acidentes segue bem aproximadamente uma distribuição de probabilidades de Poisson. Calcular a probabilidade de que em 30 dias trabalhados ocorram

i) Exatamente 18 acidentes.

ii) Mais que 10 e não mais que 20 acidentes, ou é o mesmo que de 10 e não mais que 20 acidentes / entre 10 e 20 acidentes.

i) Tem-se a média $\lambda = 0{,}6$ acidentes/dia e $t = 30$ dias. Logo para esse período a média será: $\mu = \lambda t = 0{,}6 \cdot 30 = 18$ acidentes.

Usando a aproximação pela normal temos que:

$$\mu = \sigma^2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{18} \cong 4{,}243$$

Devido a correção de continuidade, deveremos achar a área entre $17{,}5$ e $18{,}5$ na curva normal com média 18 e desvio padrão $4{,}243$.

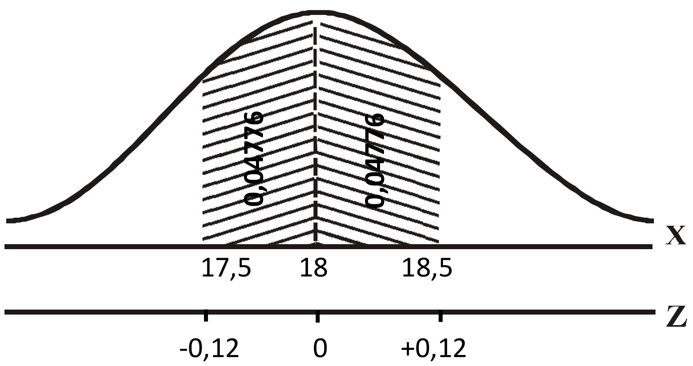


Figura 31. Área sob a curva normal padrão entre -0,12 e 0,12.

$$\sigma = \sqrt{18} = 4{,}243, \quad Z_1 = \frac{17{,}5 - 18}{4{,}243} \cong \text{-}0{,}12, \quad Z_2 = \frac{18{,}5 - 18}{4{,}243} \cong +0{,}12$$

$$P(x = 18) = P(17{,}5 \leq x \leq 18{,}5) = P(-0{,}12 \leq Z \leq +0{,}12)$$
$$= P(-0{,}12 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq +0{,}12) = 2\, x\, P(0 \leq Z \leq 0{,}12)$$

$$P(x = 18) = 2\, x\, 0{,}0478 = 0{,}0956 \cong 0{,}096 \cong 9{,}6\%$$

$$P(x = 18) = \frac{e^{-18} \text{x } 18^{18}}{18!} = \frac{5{,}99245 \text{ x } 10^{14}}{6{,}40237 \text{ x } 10^{15}} \cong 0{,}0935973 \cong 0{,}094 \cong 9{,}4\%$$

Resultado não muito diferente da aproximação.

ii) Devemos agora achar a área entre 10,5 e 20,5 na curva normal

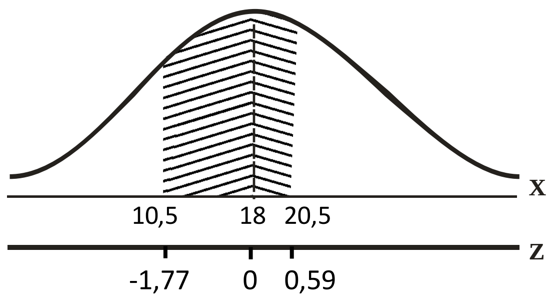


Figura 32. Área sob a curva normal padrão entre -1,77 e 0,59.

$$Z_1 = \frac{10{,}5 - 18}{4{,}243} \cong -1{,}77, \quad \mathrm{P}(10{,}5 \leq \mathrm{x} \leq 18) \cong 0{,}4616$$

$$Z_2 = \frac{20{,}5 - 18}{4{,}243} \cong 0{,}59, \quad \mathrm{P}(18 \leq \mathrm{x} \leq 20{,}5) \cong 0{,}2224$$

$$P(10{,}5 \leq x \leq 20{,}5) = P(-177, \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0{,}59)$$

$$P(10{,}5 \leq x \leq 20{,}5) = 0{,}4616 + 0{,}2224 = 0{,}6840$$

É esse o valor aproximado desejado

Outra forma de resolução.

$$P(10 \leq x \leq 20) = P(9{,}5 \leq x \leq 20{,}5) = ?$$

$$Z_1 = \frac{9{,}5 - 18}{4{,}243} = \text{-}2{,}00$$

$$Z_2 = \frac{20{,}5 - 18}{4{,}243} = +0{,}59$$

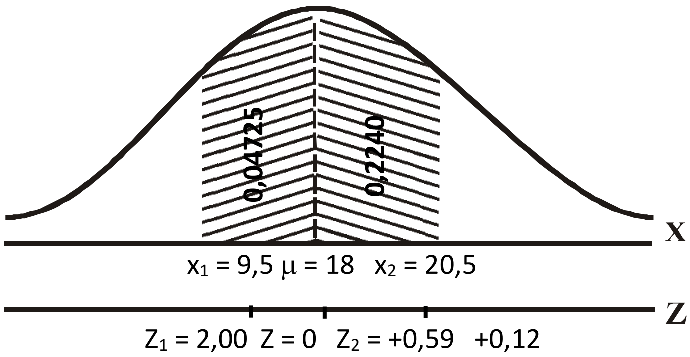


Figura 33. Área sob a curva normal padrão entre 2,00 e 0,59.

$$P(9{,}5 \leq x \leq 20{,}5) = P(-2{,}00 \leq Z \leq +0{,}59) = P(-2{,}00 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq +0{,}59)$$

$$P(9{,}5 \leq x \leq 20{,}5) = 0{,}4773 + 0{,}2224 = 0{,}6997 = 69{,}97\%$$

Observação sobre a correção de continuidade

Quando se for realizar a operação de aproximação do modelo discreto como é a distribuição de Poisson através de um modelo contínuo como é o caso da distribuição normal, deve-se realizar o processo de correção de continuidade da variável aleatória, como mostrado a seguir, para que depois se obtenha a área ou probabilidade sob a curva da distribuição Normal de probabilidades.

i) $P(x \geq x_i)$ e $P(x < x_i)$ deve-se subtrair 0,5 ao valor de x.

ii) $P(x \leq x_i)$ e $P(x > x_i)$ deve-se adicionar 0,5 ao valor de x.

Tabela da distribuição normal padrão.

Tabela 5. Áreas ou probabilidades sob a curva normal padrão ente z = 0,00 e um valor positivo de Z. Para os valores das probabilidades entre os valores negativos de Z e Z = 0,00, as áreas são obtidas por simetria.

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952

Continuação da Tabela 5

Z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4965	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4983	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,49	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500

Distribuição de probabilidade Exponencial-$Exp(\lambda)$

Introdução

As variáveis aleatórias exponenciais surgem naturalmente no tempo decorrente entre ocorrências consecutivas de variáveis Poisson. Esse tempo decorrente para que ocorra um sucesso é modelado pela distribuição exponencial. Para ilustrar situações em que a modelagem exponencial é adequada pode-se considerar a variável X como sendo o tempo decorrente entre ocorrências sucessivas de uma doença tropical bovina rara: o tempo de vida de componentes eletrônicos; o tempo decorrente entre terremotos consecutivos em regiões com falhas geológicas; o tempo decorrido até a falha (romper ou quebrar) de uma viga de aço; o tempo decorrido até a falha de um trator; entre outros. A distribuição exponencial é a versão contínua da distribuição geométrica, a qual é discreta. A variável aleatória com densidade exponencial é conhecida como variável aleatória contínua de tempo de espera, ou seja, ela refere-se ao tempo necessário para a ocorrência do primeiro sucesso.(FERREIRA, 2005)

O modelo exponencial como já foi mencionado é um modelo para modelar tempos de vida de componentes eletrônicos em geral, pois dentro de certos limites, a taxa de falhas dos mesmos pode ser considerada constante. O mesmo não ocorre com componentes mecânicos de um sistema, pois em geral sofrem desgaste e têm taxa de falha crescente. com taxa de falhas constante.

Esta é uma distribuição muito utilizada na área florestal, gerando modelos matemáticos como o Meyer tipo 1 e 2 utilizados por SCOLFORO (1994).

A distribuição exponencial é geralmente aplicada a dados com forte assimetria, ou seja, apresentando uma forma de "J" invertido.

Função Densidade de Probabilidade $[f(X)]$

Sua função densidade de probabilidade é descrita conforme a equação abaixo (KITE, 1978):

$$f(X) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda X}, \mathrm{X} \geq 0 \\ 0 \quad \text{, para outros valores de } X \end{cases}$$

Gráfico da distribuição densidade de probabilidade [f(X)]

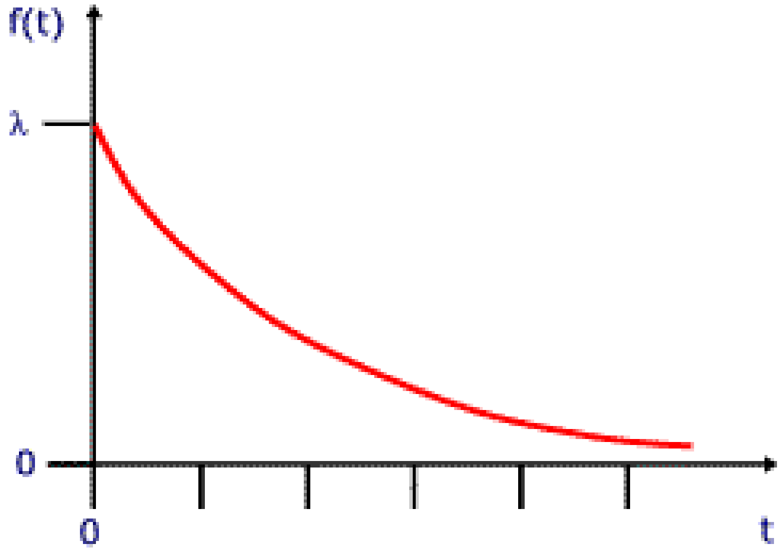


Figura 34. Gráfico representativo da função da distribuição densidade de probabilidade Exponencial.

Função de repartição ou de distribuição $[F(x)]$

A função de distribuição de probabilidade, $F(x)$, está apresentada na equação abaixo e possui uma forma simples, ao contrário do que ocorre com a normal cuja função de distribuição acumulada não tem forma definida explicita conhecida.

Sua função de distribuição acumulada é do tipo:

$$F(x) = \int_0^{\infty} f(x)\, dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

Note-se que não faz sentido valor negativo de x.

A distribuição exponencial é, portanto, a contrapartida para eventos raros da distribuição Geométrica, assim como a distribuição de Poisson o é em relação à distribuição Binomial. A importância da distribuição Exponencial vem de que ela, assim como a de Poisson, é definida para valores contínuos de x. Mais ainda, é verificado que a forma da distribuição Exponencial se aproxima da forma da distribuição de frequências de certos eventos hidrológicos como, por exemplo, as cheias máximas anuais. Ou a vida de uma torre de transmissão e lei de falhas de componentes eletrônicos.

O único parâmetro da distribuição (λ) é estimado pelo inverso da média como será mostrado posteriormente.

Gráficos representativos da distribuição de probabilidade acumulada exponencial $[F(X)]$.

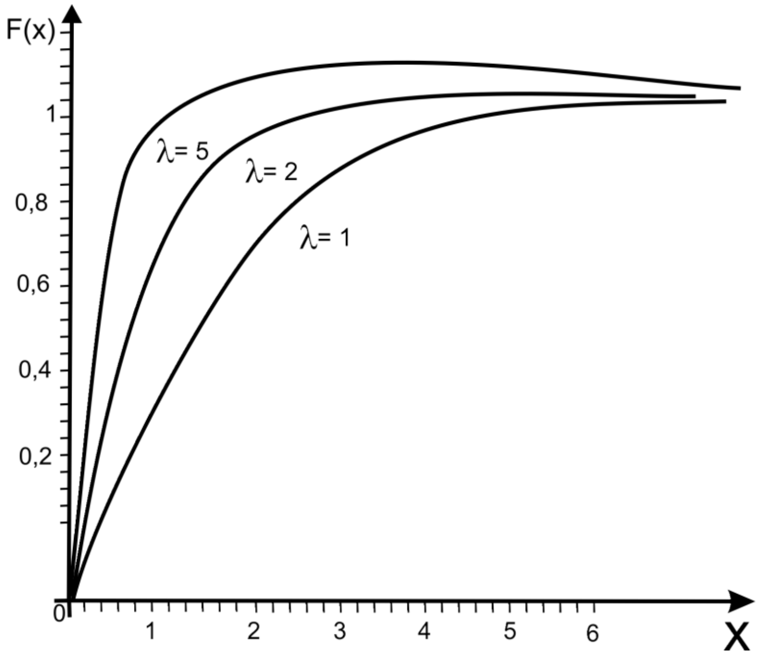


Figura 35. Gráficos representativos da distribuição de probabilidade acumulada exponencial [F(x)] para diferentes valores do seu parâmetro λ: $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, e $\lambda = 5$.

Medidas características

i) Média [$\boldsymbol{E(X)}$]:

$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

ii) Variância [$\boldsymbol{Var(X)}$]:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

iii) Moda:

$$Mo = 0$$

Função geradora de momentos

A Função geradora de momentos da distribuição de probabilidade exponencial é dada pela seguinte equação

$$m_x(t) = \left\{ \left(\frac{1}{1 - \beta t} \right) \right\} \text{ , } t < \frac{1}{\beta}$$

Propriedade

A distribuição teórica exponencial apresenta uma interessante propriedade conhecida por propriedade da falta de memória. Essa propriedade é caracterizada pela seguinte afirmativa:

$$P(X > a + b / X > a) = P(X > b),$$

ou ainda,

$$P(X \geq s + t / X \geq s) = P(X \geq s + t \cap X \geq s) / P(X \geq s) = P(X \geq s + t) / P(X \geq s) = e - \lambda(s + t) / e - \lambda s = e - \lambda t.$$

Portanto,

$$P(X \geq s + t / X \geq s) = P(X \geq t)$$

Essa propriedade pode ser interpretada da seguinte forma. Considere-se por comodidade de raciocínio que a variável X representa o tempo decorrido do plantio até a morte de mangueiras. Sob a condição de que a mangueira não morreu até o tempo a, ou seja, o evento desejado (sucesso) ainda não ocorreu até **a**, então, a probabilidade de que a mangueira viva pelo menos $a + b$ unidades de tempo é igual à probabilidade inicial de que ela dure b unidades de tempo. Uma outra forma de dizer isso é que uma velha mangueira tem a mesma distribuição do tempo de vida de uma nova mangueira, ou seja, que a planta não estaria sujeita à fadiga ou a outras fraquezas. Nem sempre esse modelo é totalmente adequado para dados de natureza biológica, embora apresente, em algumas ocasiões, excelentes ajustes a situações reais. Para tempo de vida de componentes eletrônicos e de partículas atômicas esse modelo tem sido mais apropriado e recomendado (FERREIRA, 2005).

Exemplos de aplicação

1) A distribuição exponencial ajustada a dados dos totais de diários de chuva do mês de janeiro em Mossoró, RN, é dada por $f(X) = 0{,}0785.e^{-0{,}0785X}$, em que X representa o total diário de chuvas em mm. Pergunta-se:

i) Qual é a média do total de chuva diária?

ii) Qual é a probabilidade de chover mais de 28 mm em um dia qualquer do mês de janeiro?

iii) Qual é a probabilidade de a chuva diária total ser inferior a 4 mm?

iv) Qual é a probabilidade de a chuva diária total estar entre 11 e 20 mm?

2) Prove que a média e a variância de uma distribuição exponencial é $\mu = \beta$ e $\sigma^2 = \beta^2$.

i) Qual é a função de densidade de probabilidade de uma variável aleatória com distribuição exponencial com parâmetro $\beta = 1$?

ii) Prove que esta função é uma função de densidade de probabilidade. Defina $B = \{Y \mid 0 < Y < 1\}$.

iii) Calcule $P(B)$ e represente graficamente esta probabilidade.

3) Considere uma variável aleatória contínua Y com distribuição de probabilidade exponencial de parâmetro $\beta = 1$. Derive a função de distribuição $F(Y)$. Construa os eu gráfico e use a derivada de $F(Y)$ para calcular $P(0 < Y < 1)$.

Distribuição de probabilidade de Qui-quadrado - $\chi^2(v)$

Generalidades

Estabelecida em 1876, pelo físico e astrônomo alemão FRIEDRICH ROBERT HELMERT (1843-1917), e reexaminada em 1900, pelo estatístico inglês KARL PEARSON (1857-1936). Esse modelo possui várias aplicações em estatística. Uma delas é a de propiciar mecanismos para a realização de inferências sobre o parâmetro de uma população normal. Outra aplicação refere-se aos testes de falta de ajuste de um modelo teórico aos dados observados em um experimento ou levantamento amostral.

Definição

Seja $(Z_1, Z_2, \dots, Z_v)$ uma amostra aleatória simples, extraída de uma distribuição normal padronizada $[N(0,1)]$. A variável aleatória y que é uma soma de quadrados de variáveis normais padronizadas

$$Y = \chi 2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_v^2 = \sum_{i=1}^{v} {Z_i}^2,$$

tem distribuição de qui-quadrado com V graus de liberdade (g.l.).

Função densidade de probabilidade (F.D.P.)

Uma variável aleatória Y possui distribuição Qui-quadrado (χ^2), se sua função densidade de probabilidade for da forma:

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\left(\frac{v-2}{2}\right)!}(\chi^2)^{\frac{v-2}{2}} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \quad , \quad 0 < \chi^2 < \infty$$

A distribuição de Qui-quadrado é caracterizada pelo parâmetro v (número de graus de liberdade), que corresponde ao número de variáveis normais independentes (Z_i) ao quadrado que estão sendo somadas.

Medidas características.

i) Média:

$$E[\chi^2] = v$$

ii) Variância:

$$Var[\chi^2] = 2v$$

iii) Moda:

$$Mo = v - 2, \text{se } v \geq 2$$

Para $v = 1$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ sendo assim não existe moda.

Gráficos

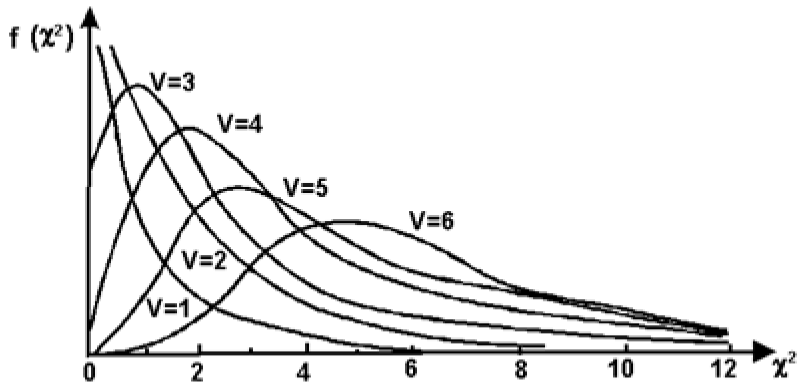


Figura 36. Distribuição do Qui-quadrado (χ^2) para vários valores de graus de liberdade (v).

Propriedades da distribuição de qui-quadrado.

i) Sejam $U_1, U_2, \ldots, U_k$ variáveis aleatórias independentes com distribuição qui-quadrado com $v_1, v_2, \ldots, v_k$ graus de liberdade respectivamente. Então sua soma $W = U_1 + U_2 + \cdots + U_k$ tem distribuição de qui-quadrado com $v_1 + v_2 + \cdots + v_k$ graus de liberdade.

ii) Sejam U_1 e U_2 variáveis aleatórias independentes. Seja U_1 com distribuição qui-quadrado com v_1 graus de liberdade, enquanto que $U = U_1 + U_2$ tem distribuição qui-quadrado com v graus de liberdade, sendo $v > v_1$. Então, U_2 tem distribuição qui-quadrado com $v - v_1$ graus de liberdade.

iii) Se o valor de qui-quadrado estiver baseado em um número de graus de liberdade (v) superior a 30, usa-se a fórmula a seguir: Isto é se χ^2 tiver distribuição qui-quadrado com v graus de liberdade, então a variável aleatória $z = \chi_c^2 = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2v-1} \sim \mathrm{N}(0{,}1)$, e assim determina-se o valor tabelado.

Determinação de valores críticos ou tabelados através de consultas às tabelas:

A distribuição de qui-quadrado tem muitas aplicações em estatística e, como no caso da normal, existem tabelas para obter probabilidades. A tabela, fornece os valores críticos ou tabelados de χ_c^2 tais que

$$P(\chi^2_{calculado} \geq \chi^2_{Crítico}) = \alpha,$$

para alguns valores de α e de v. Ou seja geralmente o que interessa é conhecer a probabilidade de que ocorra um valor de qui-quadrado calculado ou observado maior ou igual de que um valor de qui-quadrado tabelado para v graus de liberdade, probabilidade esta que está indicada pela área hachurada no gráfico abaixo. Que equivale a:

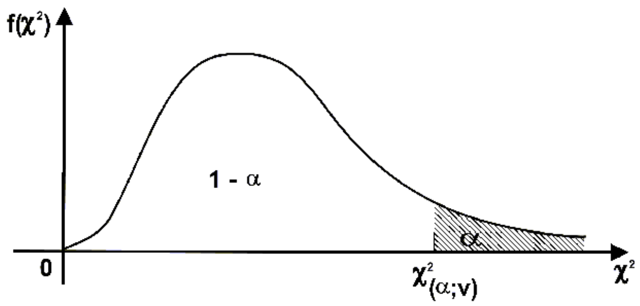


Figura 37. Distribuição de qui-quadrado (χ^2) mostrando a área crítica (hachurada), delimitada pelo valor tabelado ou crítico.

$$P\left(\chi^2_{Calculado} \geq \chi^2_{(\alpha;v)}\right) = \int_{\chi^2_{(\alpha;v)}}^{+\infty} f(\chi^2)\, d\chi^2 = \alpha$$

Função geradora de momentos da distribuição de probabilidade Qui-quadrado (χ^2)

$$m_x(t) = \frac{1}{(1-2t)^{n/2}} \text{ , para } t < \frac{1}{2}$$

Obtém-se da função geradora de momentos da distribuição gama fazendo $\alpha = \frac{v}{2} e, \beta = 2$

Exemplos:

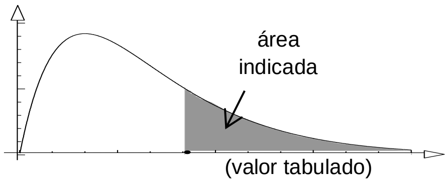
i) $\mathrm{v} = 1;\ P_{\left[\chi^2_{Calculado} \geq 3{,}84\right]} = \int_{3{,}84}^{\infty} f(\chi^2)\, d\chi^2 = 0{,}05$

ii) $\mathrm{v} = 7, \alpha = 0{,}05;\ \chi^2_{(7;0{,}05)} = 14{,}067$

iii) $\mathrm{v} = 5, \alpha = 0{,}01; \chi^2_{(5;0{,}01)} = 15{,}086$

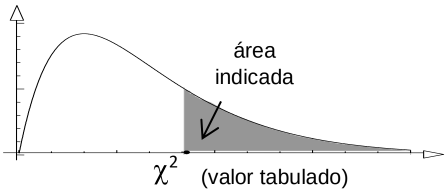
Tabelas da distribuição de qui-quadrado.

Tabela 6. Distribuição de qui-quadrado para diversos níveis de significância.



	Área na cauda superior							
gl	**0,999**	**0,9975**	**0,995**	**0,99**	**0,975**	**0,95**	**0,9**	**0,75**
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,10
2	0,00	0,01	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	0,58
3	0,02	0,04	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	1,21
4	0,09	0,14	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	1,92
5	0,21	0,31	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	2,67
6	0,38	0,53	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	3,45
7	0,60	0,79	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25
8	0,86	1,10	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07
9	1,15	1,45	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90
10	1,48	1,83	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74
11	1,83	2,23	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58
12	2,21	2,66	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44
13	2,62	3,11	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30
14	3,04	3,58	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	10,17
15	3,48	4,07	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,04
16	3,94	4,57	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,91
17	4,42	5,09	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	12,79
18	4,90	5,62	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	13,68
19	5,41	6,17	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	14,56
20	5,92	6,72	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	15,45
21	6,45	7,29	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	16,34
22	6,98	7,86	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	17,24
23	7,53	8,45	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	18,14
24	8,08	9,04	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	19,04
25	8,65	9,65	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	19,94
26	9,22	10,26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	20,84
27	9,80	10,87	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	21,75
28	10,39	11,50	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	22,66
29	10,99	12,13	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	23,57
30	11,59	12,76	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	24,48
35	14,69	16,03	17,19	18,51	20,57	22,47	24,80	29,05
40	17,92	19,42	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	33,66
45	21,25	22,90	24,31	25,90	28,37	30,61	33,35	38,29
50	24,67	26,46	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	42,94
100	61,92	64,86	67,33	70,06	74,22	77,93	82,36	90,13

Tabela 7. Distribuição de qui-quadrado para diversos níveis de significância (continuação).



gl	Área na cauda superior							
	0,25	**0,10**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,0025**	**0,001**
1	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	9,14	10,83
2	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60	11,98	13,82
3	4,11	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84	14,32	16,27
4	5,39	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86	16,42	18,47
5	6,63	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75	18,39	20,51
6	7,84	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	20,25	22,46
7	9,04	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28	22,04	24,32
8	10,22	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95	23,77	26,12
9	11,39	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	25,46	27,88
10	12,55	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	27,11	29,59
11	13,70	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76	28,73	31,26
12	14,85	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30	30,32	32,91
13	15,98	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82	31,88	34,53
14	17,12	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32	33,43	36,12
15	18,25	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80	34,95	37,70
16	19,37	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27	36,46	39,25
17	20,49	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72	37,95	40,79
18	21,60	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16	39,42	42,31
19	22,72	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58	40,88	43,82
20	23,83	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00	42,34	45,31
21	24,93	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40	43,77	46,80
22	26,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80	45,20	48,27
23	27,14	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18	46,62	49,73
24	28,24	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56	48,03	51,18
25	29,34	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93	49,44	52,62
26	30,43	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29	50,83	54,05
27	31,53	36,74	40,11	43,19	46,96	49,65	52,22	55,48
28	32,62	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99	53,59	56,89
29	33,71	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34	54,97	58,30
30	34,80	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67	56,33	59,70
35	40,22	46,06	49,80	53,20	57,34	60,27	63,08	66,62
40	45,62	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77	69,70	73,40
45	50,98	57,51	61,66	65,41	69,96	73,17	76,22	80,08
50	56,33	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49	82,66	86,66
100	109,1	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2	144,3	149,4

Distribuição de probabilidade "t" de "Student"-$t(v)$

Generalidades

A distribuição "t" de "Student" é uma distribuição de probabilidade continua e tal como distribuição de qui-quadrado só tem um parâmetro, o número de graus de liberdade, que é um número inteiro positivo, tem notável aplicação em estatística, principalmente em estudos envolvendo pequenas amostras ($n < 30$), pois proporciona os elementos necessários para se realizar inferências sobre médias populacionais. Foi estabelecida em 1908 pelo estatístico inglês WILLIAM SEALEY GOSSET (1876-1937), o qual realizou uma importante publicação a seu respeito, e que adotou o pseudônimo de "Student" ao publicar seus trabalhos, durante a primeira parte do século XX, Gosset publicou a maioria dos seus trabalhos contra a vontade de seus empregadores de uma cervejaria que o considerava "top secret", por isso que no início do século XX ele adotou o pseudônimo de Student. Em 1925, o estatístico inglês RONALD AYLMER FISHER (1890-1962), deu rigorosa demonstração dessa distribuição.

Definição

Seja Z uma variável aleatória normal padrão $[N(0,1)]$, e U uma variável aleatória qui-quadrado ($\chi^2{}_{(v=1,)}$), independente de U com v graus de liberdade. Então a variável aleatória t = $\frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{v}}}$ possui distribuição "t" de "STUDENT", com v graus de liberdade.

Função densidade de probabilidade (F.D.P.).

Uma variável aleatória contínua, possui distribuição t de "Student" se sua função densidade de probabilidade for da forma:

$$f(t) = \frac{\left[\frac{v-1}{2}\right]!}{\sqrt{\pi v}\left[\frac{v-2}{2}\right]!} \cdot \frac{1}{\left[1+\frac{t^2}{v}\right]^{\frac{(v+1)}{2}}}, -\infty < t < +\infty$$

Essa distribuição é simétrica, leptocúrtica para pequenas amostras e aproxima-se da distribuição Normal a medida que o tamanho da amostra "n" aumenta, apresenta um só máximo para $t = 0$ e admite como assíntota o eixo dos "t".(ver Figura 74).

Medidas características

i) Média:

$$E(t) = 0, \text{ a média não existe para } v = 1$$

ii) Variância:

$$\text{Var(t)} = \frac{v}{v-2} \quad , \text{ para } v > 2$$

A variância não existe para $v \leq 2$

iii) Moda:

$$Mo = 0$$

Notação

$$T \cap T(t; v)$$

Gráfico

Para cada graus de liberdade v tem-se uma expressão matemática para a função densidade de probabilidade, e assim obtêm-se uma curva para cada v. Abaixo estão representadas a curva normal e a de "t" para 1 e 4 graus de liberdade. O gráfico da distribuição de "t" tende para uma densidade da distribuição normal padrão à medida que n cresce, tanto que se usa a tabela da curva normal para calcular as probabilidades de "t" (aproximadas) quando os graus de liberdade são superiores a 30. Essa distribuição é importante no que se refere a inferências sobre médias populacionais.

A distribuição t de "Student" pode ser ainda visualizada através da Figura 83 abaixo.

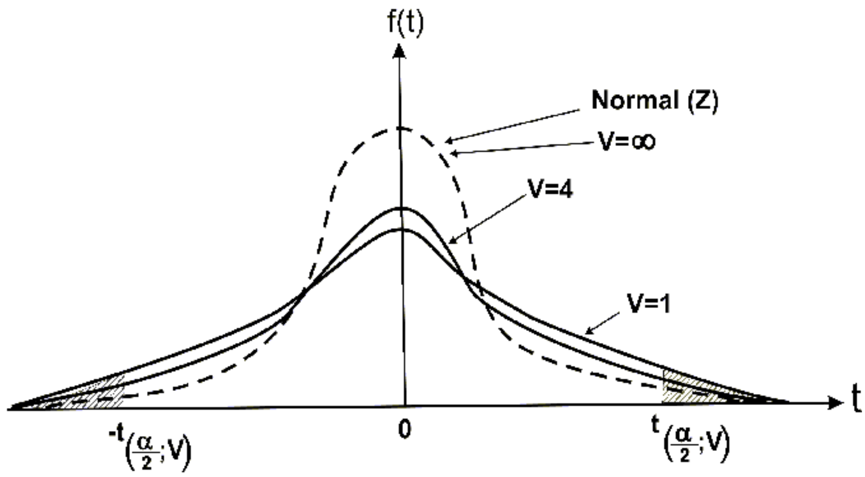


Figura 38. Distribuição de "Student" (t) para vários valores de graus de liberdade (v).

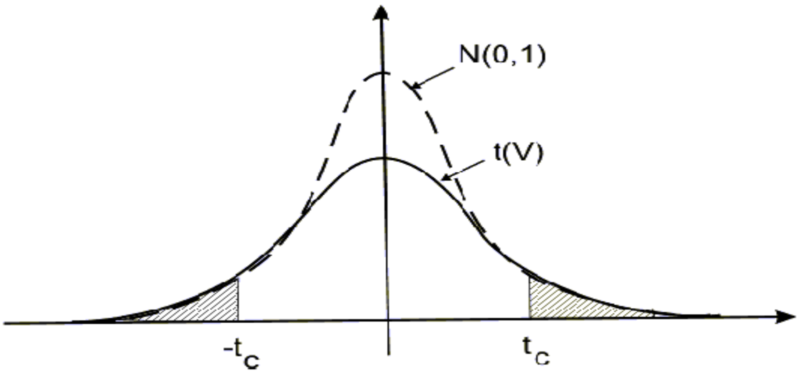


Figura 39. Distribuição de "Student" (t) para vários valores de graus de liberdade (v).

Função geradora de momentos da distribuição de probabilidade t de 'Student"

A função geradora de momentos da distribuição t de "Student" não existe

Determinação de valores críticos ou tabelados através de consultas às tabelas:

Como essa distribuição é bastante utilizada na prática, existem tabelas fornecendo probabilidades relativas a ela.na verdade a tabela fornece valores críticos ou tabelados, tais que $P(t_{\text{calculado}} \geq t_{\text{crítico}}) = \alpha$, para alguns valores de α e de v.

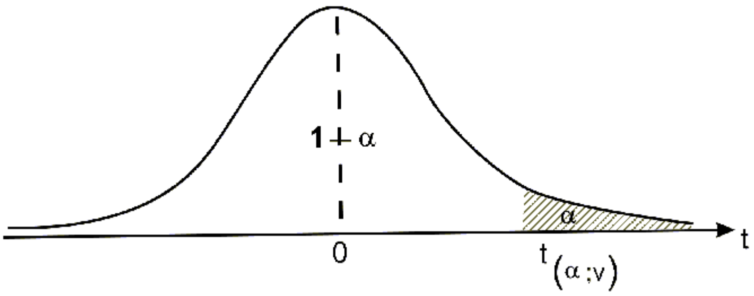


Figura 40. Distribuição t de "Student", mostrando o valor tabelado e a região crítica unilateral (hachurada) à direita desse valor.

Já a probabilidade de se encontrar um valor de "t" maior ou igual a $-t_{\text{crítico}}$ e menor ou igual a $+t_{\text{critico}}$ é :

$$P(-t_{\text{crítico}} \leq t \leq + \, t_{\text{crítico}}) = 1 - \alpha$$

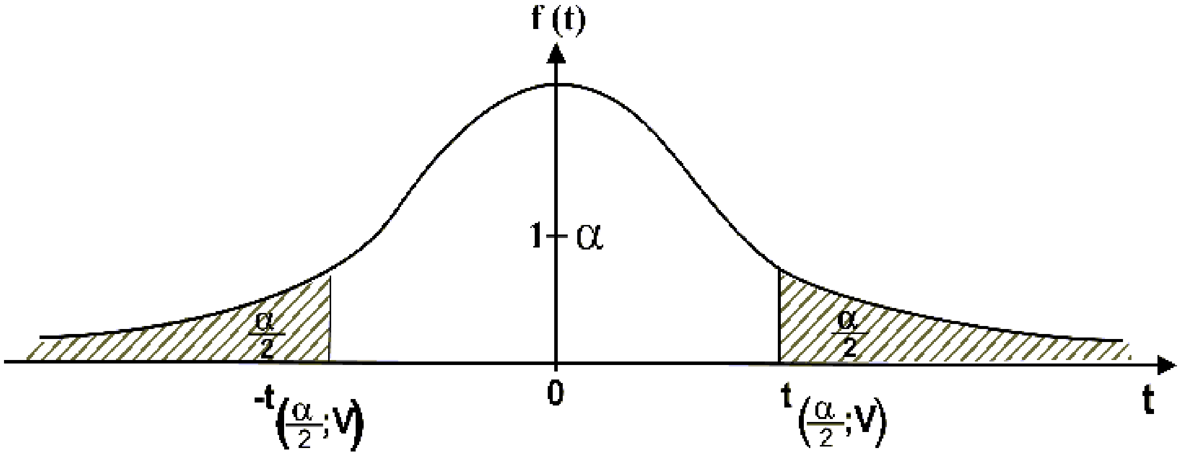


Figura 41. Distribuição "t" de "Student", mostrando os valores tabelados ou críticos e as regiões críticas bilaterais (hachuradas) à esquerda e a direita desses valores.

Exemplos

i) $v = 10, t_c = 2{,}23$, significa que $P(t \geq |2{,}23|) \ = \ 0{,}05$; isto é

$$P(t \geq +\ 2{,}23) \ = \ \frac{0{,}05}{2} \ = \ 0{,}025$$

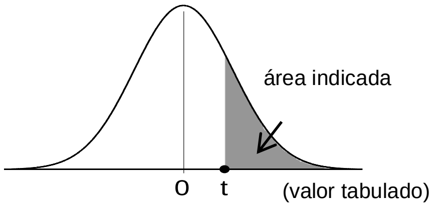
ii) $v = \ 6$, então $P\left(-1{,}943 \leq t_{\left(6,\frac{0{,}10}{2}\right)} \leq 1{,}943\right) = 0{,}90$ ao passo que $P\left(t_{\left(6,\frac{0{,}05}{2}\right)} \geq 2{,}447\right) = 0{,}025$

iii) $t_{(12;0{,}05)} \ = 1{,}782$

iv) $t_{\left(12;\frac{0{,}01}{2}\right)} \ = 3{,}055$

Tabelas da distribuição t de "Student":

Tabela 8. Tabela da distribuição t de "Student" com valores críticos ou tabelados unilaterais para diversos níveis de significância.



	Área na cauda superior								
gl	**0,25**	**0,10**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,0025**	**0,001**	**0,0005**
1	1,000	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	127,3	318,3	636,6
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,09	22,33	31,60
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,21	12,92
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,894	6,869
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852	4,221
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787	4,140
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	3,733	4,073
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686	4,015
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646	3,965
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,610	3,922
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,579	3,883
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552	3,850
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,768
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,067	3,435	3,707
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,057	3,421	3,689
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,047	3,408	3,674
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,038	3,396	3,660
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,030	3,385	3,646
35	0,682	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724	2,996	3,340	3,591
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	2,971	3,307	3,551
45	0,680	1,301	1,679	2,014	2,412	2,690	2,952	3,281	3,520
50	0,679	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	2,937	3,261	3,496
z	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291

Tabela 9. Distribuição de t (Student): Bilateral.

gl\P	**0,90**	**0,80**	**0,70**	**0,60**	**0,50**	**0,40**	**0,30**	**0,20**	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,001**
01	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
02	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
03	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,541	12,924
04	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
05	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
06	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
07	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,365	3,499	5,408
08	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
09	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,726
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,856	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,856	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Distribuição de probabilidade "F" de "Snedecor (1881-1974)-Fisher (1890-1962)"-$F(v_1, v_2)$

Generalidades

Esse modelo de distribuição de probabilidade, foi estabelecido pelo estatístico inglês "RONALD AYLMER FISHER", pois Fisher estudou a distribuição de "z" (de Fisher) a qual não deve ser confundida com a variável "Z" (reduzida da curva normal), que historicamente precedeu a de "F", sendo que esta foi obtida a partir daquela para se evitar o uso de logaritmos neperianos. Tem-se a seguinte relação entre as duas variáveis.

$$\mathrm{e}^{2z} = F \therefore z = \frac{1}{2}\ln F \therefore 2z\ln F = \log F$$

$$\therefore z = \frac{1}{2}\frac{log\, F}{log\, e} = \frac{1}{2}\log_e F \text{ ou } z = \frac{1}{2}\ln F$$

A distribuição "F" está entre aquelas distribuições de probabilidade mais importantes na estatística com inúmeras aplicações, tendo ainda, um maior destaque na estatística experimental, onde a mais importante delas é o seu emprego nas análises de experimentos. Nesse caso, o investigador científico tem por objetivo comparar os efeitos de dois ou mais tratamentos sob determinadas condições. A hipótese de igualdade de efeitos de tratamentos é testada usando a distribuição de probabilidade "F".

Definição

Sejam "U" e "V" duas variáveis aleatórias independentes, cada uma distribuída segundo uma distribuição de qui-quadrado, com $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$ graus de liberdade respectivamente. Então, a variável aleatória

$$\boldsymbol{F} = \frac{\frac{U}{v_1}}{\frac{V}{v_2}} = \frac{\frac{\chi^2_{v_1}}{v_1}}{\frac{\chi^2_{v_2}}{v_2}},$$

possui distribuição de "F" com $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$ graus de liberdade (parâmetros).

Função densidade de probabilidade:

Uma variável aleatória "F" possui distribuição de "f" com v_1 e v_2 graus de liberdade se sua função densidade de probabilidade for da forma:

$$f(F) = \frac{\frac{(v_1 + v_2 - 2)}{2}}{\left[\frac{v_1 - 2}{2}\right]!\left[\frac{v_2 - 2}{2}\right]!} v_1^{\left(\frac{v_1}{2}\right)} v_2^{\left(\frac{v_2}{2}\right)} \frac{F^{\frac{(v_1 - 2)}{2}}}{(v_1.F + v_2)^{\frac{(v_1 + v_2)}{2}}}, 0 \leq F \leq \infty$$

Essa função é uma função contínua cuja variável aleatória varia de 0 a $+\infty$, é assimétrica à direita e depende dos parâmetros v_1 e v_2, que são os graus de liberdade.

Notação

$f \cap F(v_1, v_2)$

Medidas características

i) $E(F) = \frac{v_2}{v_2-2}$, para $v_2 \ > \ 2$

ii) $VAR(F) \ = \ \frac{2v_2^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-2)^2(v_2-4)}$, para $v_2 > 4$

iii) $M_o \ = \ \left(\frac{v_1-2}{v_1}\right)\left(\frac{v_2}{v_2+2}\right)$, para $v_1 \ > \ 2$

Gráficos da distribuição de F

Os gráficos da distribuição de F estão em função dos números de graus de liberdade $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$ como pode ser notado através da Figura 42 a seguir.

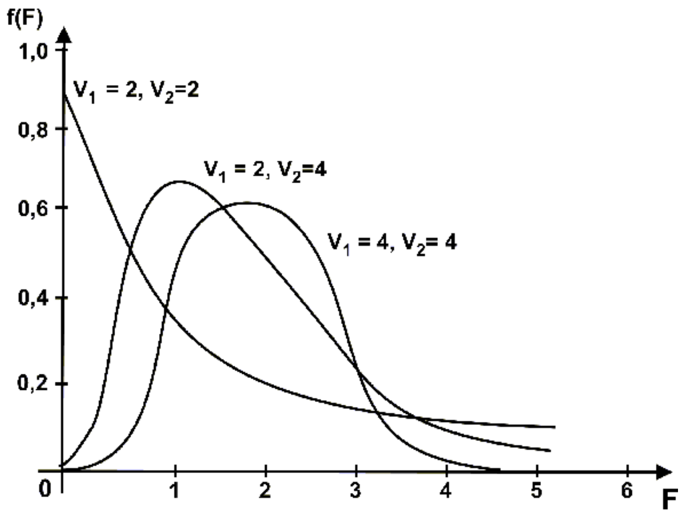


Figura 42. Distribuição de "F" para vários valores de graus de liberdade $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$.

Propriedade

Se X tem distribuição "F" com v_1 e v_2 graus de liberdade, então, $\frac{1}{X}$ possui distribuição "F" com v_1 e v_2 graus de liberdade. Ou seja:

$$F_{\alpha(v_1,v_2)} \ = \ \frac{1}{F_{1-\alpha(v_2,v_1)}}$$

Em que os valores entre parênteses se referem aos graus de liberdade ($g.l. = \ v$).

Função geradora de momentos da distribuição de probabilidade F de Fisher-Snedecor

A função geradora de momentos desse modelo não existe

Determinação de valores críticos ou tabelados através de consultas às tabelas:

Nas tabelas são dados os pontos (valores tabelados ou críticos) $f(v_1, v_2; \alpha)$, tais que, conforme mostra o gráfico 43 abaixo.

$$P[F(v_1, v_2) \geq f(v_1, v_2; \alpha)] = \alpha$$

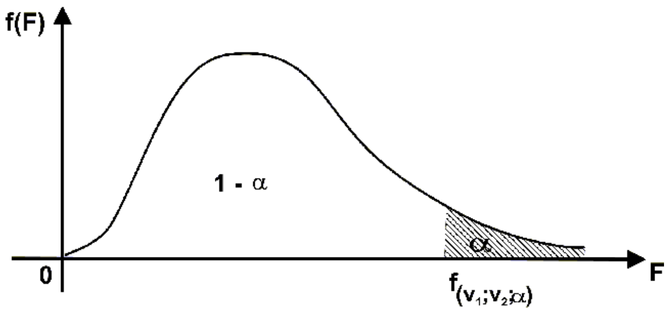


Figura 43. Distribuição de "F" mostrando a área crítica delimitada pelo valor tabelado de "F".

Exemplos

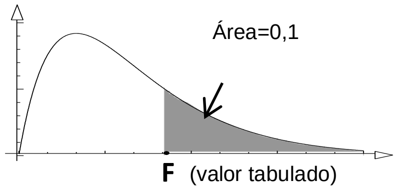
i) $v_1 = 10$ e $v_2 = 10$

$$\int_{2,98}^{\infty} f(F)\,dF = 0{,}05 \quad e \quad \int_{4,85}^{\infty} f(F)\,dF = 0{,}01$$

ii) $v_1 = 5$ e $v_2 = 7; \alpha = 0{,}05; f(5{,}7; 0{,}05) = 3{,}97$

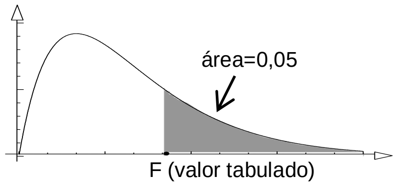
Tabelas da distribuição F de Snedecor-Fisher:

Tabela 10. Distribuição “F” de Snedecor-Fisher, mostrando os valores críticos ou tabelados para os níveis de significância de 0,10.



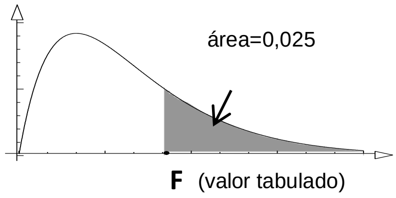
g.l. do denominador	graus de liberdade no numerador									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94
21	2,96	2,57	2,36	2,23	2,14	2,08	2,02	1,98	1,95	1,92
22	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90
23	2,94	2,55	2,34	2,21	2,11	2,05	1,99	1,95	1,92	1,89
24	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91	1,88
25	2,92	2,53	2,32	2,18	2,09	2,02	1,97	1,93	1,89	1,87
26	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88	1,86
27	2,90	2,51	2,30	2,17	2,07	2,00	1,95	1,91	1,87	1,85
28	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87	1,84
29	2,89	2,50	2,28	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89	1,86	1,83
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82
35	2,85	2,46	2,25	2,11	2,02	1,95	1,90	1,85	1,82	1,79
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76
45	2,82	2,42	2,21	2,07	1,98	1,91	1,85	1,81	1,77	1,74
50	2,81	2,41	2,20	2,06	1,97	1,90	1,84	1,80	1,76	1,73
100	2,76	2,36	2,14	2,00	1,91	1,83	1,78	1,73	1,69	1,66

Tabela 11. Distribuição "F" de Snedecor-Fisher, mostrando valores os críticos ou tabelados para os níveis de significância de 0,05 (continuação).



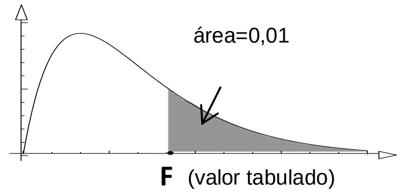
gl do	graus de liberdade no numerador									
denominador	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16
35	4,12	3,27	2,87	2,64	2,49	2,37	2,29	2,22	2,16	2,11
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08
45	4,06	3,20	2,81	2,58	2,42	2,31	2,22	2,15	2,10	2,05
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93

Tabela 12. Distribuição "F" de Snedecor-Fisher, mostrando valores os críticos ou tabelados para os níveis de significância de 0,025 (continuação).



gl do	graus de liberdade no numerador									
denominador	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	647,79	799,48	864,15	899,60	921,83	937,11	948,20	956,64	963,28	968,63
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77
21	5,83	4,42	3,82	3,48	3,25	3,09	2,97	2,87	2,80	2,73
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70
23	5,75	4,35	3,75	3,41	3,18	3,02	2,90	2,81	2,73	2,67
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68	2,61
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65	2,59
27	5,63	4,24	3,65	3,31	3,08	2,92	2,80	2,71	2,63	2,57
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61	2,55
29	5,59	4,20	3,61	3,27	3,04	2,88	2,76	2,67	2,59	2,53
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51
35	5,48	4,11	3,52	3,18	2,96	2,80	2,68	2,58	2,50	2,44
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39
45	5,38	4,01	3,42	3,09	2,86	2,70	2,58	2,49	2,41	2,35
50	5,34	3,97	3,39	3,05	2,83	2,67	2,55	2,46	2,38	2,32
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,42	2,32	2,24	2,18

Tabela 13. Distribuição "F" de Snedecor-Fisher, mostrando valores os críticos ou tabelados para os níveis de significância de 0,01 (continuação).



gl. do denominador	**graus de liberdade no numerador**									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	4052,2	4999,3	5403,5	5624,3	5764,0	5859,0	5928,3	5981,0	6022,4	6055,9
2	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39	99,40
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98
35	7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,20	3,07	2,96	2,88
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80
45	7,23	5,11	4,25	3,77	3,45	3,23	3,07	2,94	2,83	2,74
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,78	2,70
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50

Distribuição de probabilidade gama - $Gama(\alpha, \beta)$

Generalidades

A distribuição Gama de dois e três parâmetros tem sido largamente utilizada em hidrologia com a finalidade de modelar as frequências de cheias anuais.

Esta distribuição foi testada para modelar as quantidades diárias de chuva, em localidades da Jordânia, Nigéria, Botswana e Sri Lanka, tendo obtido resultados satisfatórios conforme cita Almeida (1995) nos trabalhos de[1] Stern e Coe (1982). Faria (1998), utilizou a distribuição gama para estimar a precipitação dependente ao nível de 75% de probabilidade, obtendo boa aderência. Na literatura como pode ser observado tem-se utilizado com frequência esta distribuição na estimação da probabilidade de precipitação. A distribuição gama tem grande aplicação em hidrologia, devido a aspectos de natureza morfológicos unicamente.

Cargnelutti filho et al. (2004), ajustaram esse modelo a séries de dados de radiação solar global média decendial de 22 municípios do Rio Grande do Sul., obtendo bons resultados através dos teste de Kolmogorov-Smirnov.

[1] STERN, R.D. & COE, R. The use of rainfall models in agricultural planning. Agricultural Meteorology, v. 26, p. 35-50, 1982.

Função densidade de probabilidade

Segundo Botelho & Morais (1999), Bressan (2002), Martins (2003), Hoel (1980), Meyer (1969) e Morettin & Bussab (2003), uma variável aleatória contínua x com $(0 < x < \infty)$ se distribui segundo uma distribuição gama de parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ se sua função de densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, para\ 0\ < x < +\infty \\ \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Se o parâmetro α for inteiro, esta família de distribuições de probabilidade recebe o nome de distribuições de Erlang. Essa distribuição tem papel de destaque em telefonia e recebeu esse nome em homenagem ao engenheiro dinamarquês Erlang, que empregou essa distribuição pela primeira vez para modelar duração de chamadas telefônicas por volta de 1917.

Medidas características

i) Média:

Se X é uma variável aleatória com distribuição gama de parâmetros α e β, então o estimador da média (primeiro momento em relação à origem) é:

$$m_1 = \alpha \cdot \beta$$

ii) Variância:

E o estimador da variância (segundo momento em relação à média) é:

$$\mu_2 = V(X) = \alpha\beta^2$$

iii) Moda:

$$Mo\ =\ (\alpha\ - 1)\, \beta\ , se\ \ \alpha\ \geq\ 1$$

Para $\alpha\ <\ 1,\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, nesse caso existe moda.

A proporção de valores nulos (Q) em cada período é estimada usando-se o estimador:

$$\hat{Q} = \frac{m}{n}$$

em que: m é o número de zeros em uma série climatológica; n é o tamanho da amostra.

A função gama de probabilidade possui dois parâmetros, o de forma (α) e o de escala (β). [21]Thom (1958), citado por Miller & Weaver (1968), afirmou que para valores de α maiores ou igual a 100, a distribuição gama aproxima-se da distribuição normal. O parâmetro de escala (β) indica o grau de dispersão entre os dados de uma série estudada.

[21] THOM, H.C.S. A note on the gamma distribution. Monthly weather review, v. 86, n. 4, p. 117-122, 1958.

Um grande problema encontrado em trabalhos que envolvem a distribuição gama é a estimação dos parâmetros α e β, devido à complexidade e extensão dos cálculos envolvidos. Vários métodos podem ser usados, como o método dos quadrados mínimos, o método dos momentos e o da máxima verossimilhança. Porém, todos possuem limitações, seja por problemas matemáticos ou por produzirem estimativas ineficientes. O método dos quadrados mínimos apresenta uma série de dificuldades quando aplicado à distribuição gama, e não é recomendado. Os métodos da máxima verossimilhança e o dos momentos são os mais comumente utilizados, mas, segundo Thom (1958), deve-se preferir o da máxima verossimilhança devido às suas melhores propriedades.

Algumas formas de estimar os parâmetros da distribuição gama foram desenvolvidas, contribuindo, junto com a sua flexibilidade de formas, para sua utilização em diversas áreas (HAAN, 1977). Mas o principal método para estimar seus parâmetros é o método da máxima verossimilhança, que deve satisfazer à condição $\alpha > 0$ (por definição) (CATALUNHA et al., 2002).

Distribuição de probabilidade acumulada ou função de repartição ou de distribuição [$\boldsymbol{P(X \leq x) = F(X)}$]

Sendo por exemplo $F(x)$ a probabilidade de ocorrência de uma precipitação menor ou igual a x, então ela pode ser obtida através de sua função de distribuição de probabilidade acumulada:

$$P(X \leq x) = F(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_0^x u^{(\alpha-1)}\, e^{-\frac{u}{\beta}}du$$

sendo: $F(x)$ é a probabilidade de ocorrer um valor $X \leq x$, ou probabilidade de ocorrer uma quantidade de precipitação igual ou inferior a x; X é a variável aleatória contínua que representa os valores das precipitações; $\Gamma(\alpha)$ é a função gama incompleta; α é o parâmetro de forma da variável aleatória X; β é o parâmetro de escala da variável aleatória X (mm); e é a base do logaritmo neperiano (2,718...); x é a quantidade de chuva, em mm.

$\Gamma(\alpha)$ é definida como:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{\alpha-1}dx$$

Através do desenvolvimento de (31), fazendo-se uso da série de Taylor, obtém-se:

$$F(t) = \frac{t^{\hat{\alpha}}}{\hat{\alpha}\Gamma(\hat{\alpha})e^{t}}\left[1 + \frac{t}{\hat{\alpha}\ +1} + \frac{t^2}{(\hat{\alpha}+1)(\hat{\alpha}+2)} + \frac{t^3}{(\hat{\alpha}+1)(\hat{\alpha}+2)(\hat{\alpha}\ +3)} + \dots\right]$$

que é uma expressão que permite o cálculo aproximado da probabilidade de ocorrência de um valor menor ou igual a t, de onde obtém-se:

$$x = t\hat{\beta}$$

As estimativas dos parâmetros α e β foram efetuadas pelo método da máxima verossimilhança (em inglês, "maximum likelihood"), desenvolvido por Fisher (1941) e proposto por [22]Thom citado por Assis et al. (1966). Este método produz estimativas eficientes de parâmetros estatísticos. Thom (1958), usando este método derivou as equações para estimativas dos parâmetros da distribuição gama através da resolução da seguinte equação quadrática:

$$12A\alpha^2 - 6\alpha - 1 = 0$$

sendo que:

$$A = ln\,\bar{x} - x_g$$

em que:

$\bar{x}$ - média aritmética das observações, mm;

x_g - média geométrica das observações, mm;

x_i - i-ésimo valor da precipitação pluviométrica diária, mm;

n - número de observações.

Função geradora de momentos da distribuição de probabilidade gama é dada por:

$$m_x(t) = \left(\frac{1}{1-\beta t}\right)^{\alpha}, \text{para } t < \frac{1}{\beta}$$

Gráficos representativos da distribuição densidade de probabilidade gama.

O gráfico da distribuição densidade de probabilidade gama para os diversos valores do parâmetro de forma e considerando o parâmetro de escala constante $(\beta = 1)$, é dado conforme a Figura 88 (BRESSAN, 2002), e também através das Figuras 44 e 45, abaixo.

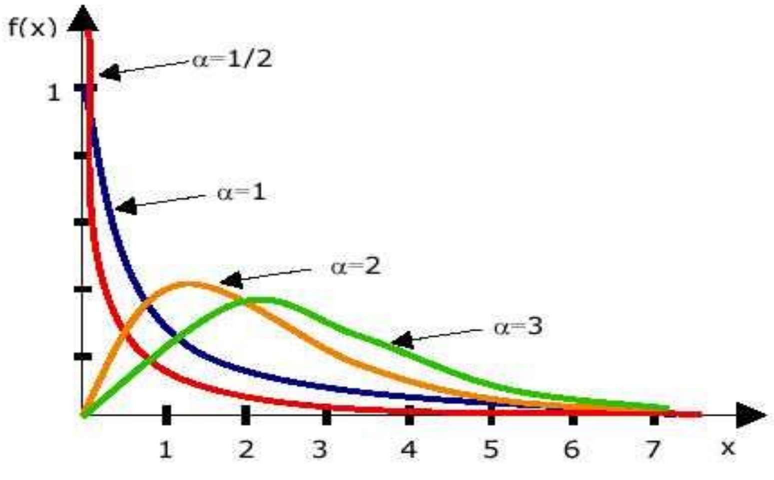


Figura 44. Gráficos representativos da distribuição densidade de probabilidade gama.

[22] THOM, H. C. S. Some methods of climatological analysis. Roma: FAO, 1966. 50 p. (FAO. Technical Notes, 81).

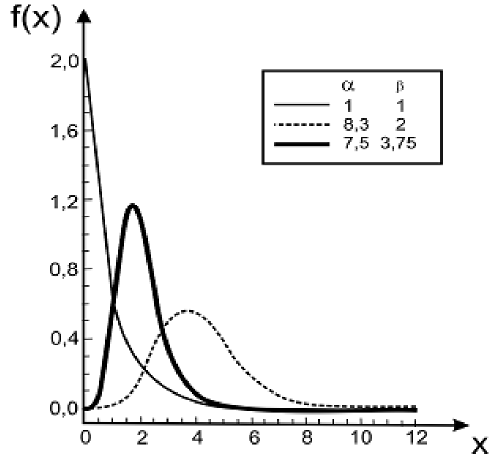


Figura 45. Gráficos representativos da distribuição densidade de probabilidade gama.

A distribuição gama tem assimetria positiva com o parâmetro β diminuindo e o parâmetro α aumentando. Variando-se β, com α constante, muda-se a escala da distribuição, enquanto variando-se α, com β constante, muda-se a sua forma (ASSIS et al., 1996).

Gráficos representativos da distribuição de probabilidade acumulada (função de repartição).

A distribuição gama de probabilidade acumulada ou função de repartição, possui um gráfico com formato característico crescente como mostrado nas Figuras 46 e 47 a seguir.

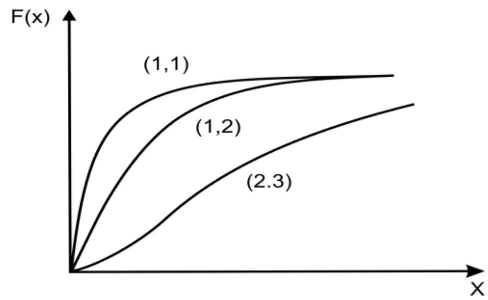


Figura 46. Gráficos representativos da distribuição de probabilidade acumulada (distribuição de repartição) Gama.

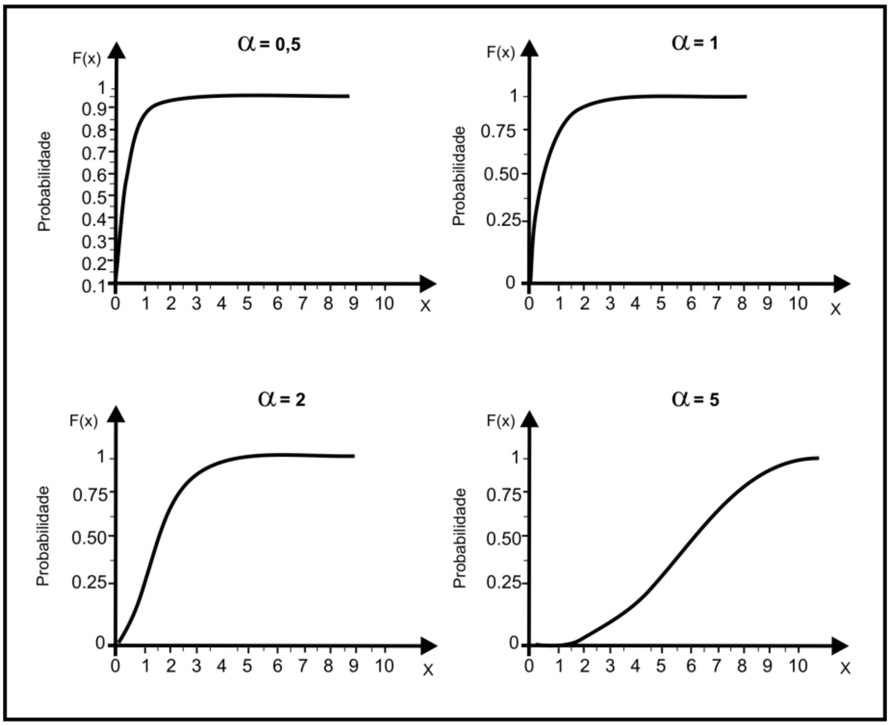


Figura 47. Gráficos representativos da distribuição de probabilidade acumulada (distribuição de repartição) Gama.

Exercícios

1) Seja X uma variável aleatória contínua com distribuição gama e parâmetros $\alpha = 1$ e $\beta = 2$. Sendo assim determine:

i) A função de densidade de probabilidade $[f(X)]$ e seu gráfico;

ii) A probabilidade $P(0 \leq X \leq 5)$;

iii) A média da distribuição;

iv) A variância da distribuição;

v) O desvio padrão da distribuição;

vi) A função de distribuição acumulada $[F(X)]$ e seu gráfico.

Respostas:

i) A expressão analítica da função de densidade de probabilidade de uma variável com distribuição Gama é dada por:

$$f(X) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} X^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$$

que para o exemplo, $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, resulta:

$$f(X) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}$$

Calculando-se o valor da função $f(X)$ em alguns pontos no interior do intervalo $0 \leq X \leq + \infty$, onde a função é definida, tem-se:

Tabela 14. Distribuição dos valores da variável aleatória continua Gama e os diversos valores obtidos da função densidade de probabilidade.

X = x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	...
f(X)	0,50	0,3894	0,3033	0,2362	0,1839	0,1433	0,1116	

O gráfico dessa função é o da figura abaixo (Figura 48).

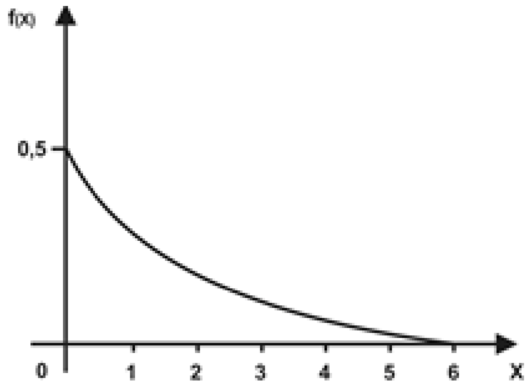


Figura 48. Gráfico da função de densidade da variável X com distribuição Gama e parâmetros $\alpha = 1$ e $\beta = 2$.

ii) A probabilidade é : $P(0 \leq X \leq 5) = \frac{1}{2}\int_0^5 e^{--\frac{1}{2}x}\,dx = \frac{1}{2}\left(-2e^{-\frac{1}{2}x}\right)\Big|_0^5 = e^{-5/2} + e^0 = 1 - 0{,}0821 = 0{,}9179 = 91{,}79\%$

iii) A média: $E(X) = \alpha\beta = 1 \cdot 2 = 2$

iv) A variância: $V(X) = \alpha\beta^2 = 1 \cdot 4 = 4$

v) O desvio padrão: $DP = \sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{4} = 2$

vi) A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória com distribuição Gama é dada pela seguinte expressão:

$$F(X) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^x t^{\alpha-1}e^{-t/\beta}\,dt$$

que, neste exemplo é dado por:

$$F(X) = \frac{1}{2}\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t}dt$$

$$F(X) = \frac{1}{2}\left[\left(-2e^{-\frac{1}{2}t}\right)\right]_0^x = \left[-e^{-\frac{1}{2}t}\right]_0^x = 1 - e^{-\frac{1}{2}x}$$

Portanto,

$$F(X) = \begin{cases} 0 \quad , & \text{para} \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}x} \quad , & \text{para} \quad x > 0 \end{cases}$$

Assim a $P(0 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5)$ pode ser calculada pela $F(X)$, ou seja:

$$P(0 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) = 1 - e^{-5/2} = 1 - 0{,}0821 = 0{,}9179 = 91{,}79\ \%.$$

O gráfico de $F(X)$, destacando a $F(5) = 0,9179$, é mostrado na Figura 49 abaixo.

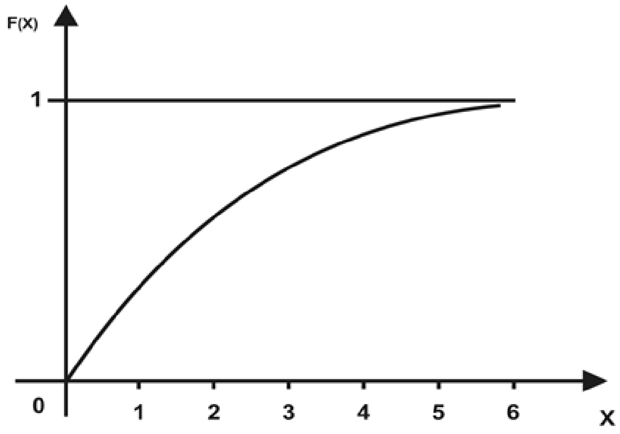


Figura 49. Gráfico representativo da função de distribuição acumuladas da variável aleatória X com distribuição Gama e parâmetros $\alpha = 1$ e $\beta = 2$.

2) Escreva a função de densidade de uma variável aleatória com distribuição Gama com parâmetro $\alpha = 2$ e $\beta = 1$. Defina o evento A na forma $A = \{Y \mid 1 < Y < 3\}$. Determine P(A) e represente, graficamente, esta probabilidade.

3) Use a definição de função gama para encontrar $\Gamma\,(2)$ e $\Gamma(3)$. Para verificar que sua integração está correta, lembre-se que $\Gamma\,(2) = 1$ e $\Gamma\,(3) = 2$.

4) Num determinado projeto de irrigação, o consumo diário de água (em milhões de m^3) segue aproximadamente uma distribuição Gama com $\alpha = 2$ e $\beta = 3$. Se a capacidade diária de água neste projeto é de 10 milhões de metros cúbicos, qual é a probabilidade que num certo dia o suprimento de água seja inadequado?

Distribuição de probabilidade de Erlang-Erl $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$

Generalidades

A distribuição de Erlang é um caso especial da distribuição gama. Se o parâmetro α de uma uma variável aleatória de Erlang não for um número, porém $\alpha > 0$, então a variável aleatória terá uma distribuição gama.no entanto, na função densidade de Erlang, o parâmetro α aparece como α fatorial.

Por conseguinte, de modo a definir uma variável aleatória gama, requeremos uma generalização da função fatorial.

Uma variável aleatória exponencial descreve o comprimento até que a primeira contagem seja obtida em um processo de Poisson. Uma generalização da distribuição exponencial é o comprimento até que α contagens ocorram em um processo de Poisson. A variável aleatória que é igual ao comprimento do intervalo até que α contagens em um processo de Poisson é uma varável aleatória de Erlang.

Função densidade de probabilidade $[f(X)]$

A variável aleatória X, que é igual ao comprimento do intervalo até que α falhas ocorram em um processo de Poisson, com média $\beta > 0$, tem distribuição de Erlang com parâmetros α e β. A função densidade de probabilidade de X é dada por:

$$f(x) = \frac{\beta^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\beta X}}{(\alpha-1)!}, \quad \text{para } X > 0 \text{ e } \alpha = 1,2,\ldots,$$

Uma variável aleatória de Erlang com $\alpha = 1$ é uma variável aleatória exponencial. Probabilidades envolvendo as variáveis aleatórias de Erlang são frequentemente determinadas calculando o somatório das variáveis aleatórias de Poisson. Além disso a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória de Erlang pode ser usada para determinar probabilidades; entretanto, a integração por partes é frequentemente necessária sendo assim tem-se de ter o cuidado para definir a variável aleatória e o parâmetro em unidades consistentes.

Distribuição de probabilidade acumulada ou Função de repartição ou função de distribuição

A função de distribuição cumulativa de uma variável aleatória de Erlang X pode ser obtida calculando $P(X \geq x) = 1 - P(X > x)$ e $P(X > x)$.

Sendo assim, a função densidade de probabilidade de x pode ser obtida por diferenciação da função de distribuição cumulativa e pelo uso de simplificações algébricas.

Gráficos da distribuição de probabilidade de Erlang

Abaixo são mostrados através da figura 50 diversos gráficos da distribuição de Erlang em função dos valores dos parâmetros α e β.

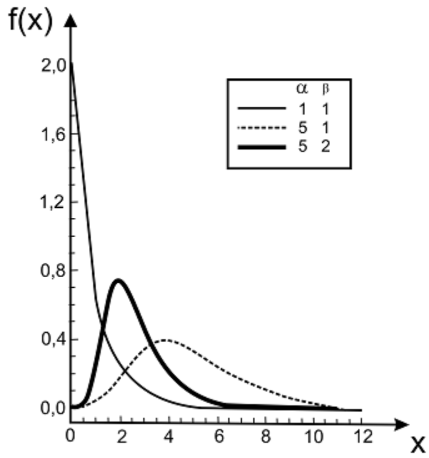


Figura 50. Gráficos representativos da distribuição densidade de probabilidade de Erlang.

Medidas características

Poderia se pensar que uma varável aleatória de Erlang seria a correspondente variável contínua de uma variável aleatória binomial negativa. Uma variável aleatória binomial negativa pode ser expressa como a soma de α variáveis aleatórias geométricas. Similarmente, uma variável aleatória de Erlang pode ser representada como a soma das α variáveis exponenciais.

Usando esse raciocínio, podemos facilmente mostrar o seguinte resultado plausível.

Se X é uma variável aleatória de Erlang, com parâmetros α e β, então a média e a variância de X serão dadas por:

i) **Média:** $\mu = E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$

ii) **Variância:** $Var(X) = V(X) = \sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$

Distribuição de probabilidade de Cauchy-Cauchy $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})$

Generalidades

A distribuição de Cauchy é uma distribuição simétrica, em forma de sino. Sendo que o interesse nessa distribuição se deve ao fato de não possuir nenhum momento (nem função geradora de momentos), isto é, todos os momentos são divergentes. Representa assim um caso atípico extremo que é usado em estatística para testar hipóteses ou conjecturas. Pode ser também demonstrado que o quociente de duas variáveis aleatórias normais padrões é uma variável aleatória com distribuição de Cauchy. Este fato deve alertar o leitor ou pesquisador para o risco de se obter resultados inesperados ao se trabalhar com razões de variáveis aleatórias normais.

Função densidade de probabilidade $[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})]$

A função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\pi} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Para $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, obtém-se a chamada distribuição padronizada, que é o caso particular da distribuição "t" de "Student' com 1 grau de liberdade.

Distribuição de probabilidade acumulada ou Função de distribuição ou Função de repartição $[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})]$

A função de distribuição acumulada é dada por:

$$F(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctan\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), x \in \mathbb{R}$$

Gráfico da distribuição de probabilidade de Cauchy

A função densidade de probabilidade é uma curva com um aspecto semelhante à curva normal, conforme mostra o gráfico abaixo na figura 51, embora com caudas mais pesadas, no sentido de que a área ou probabilidade associada às caudas da distribuição de Cauchy é maior do que a área correspondente na distribuição normal.

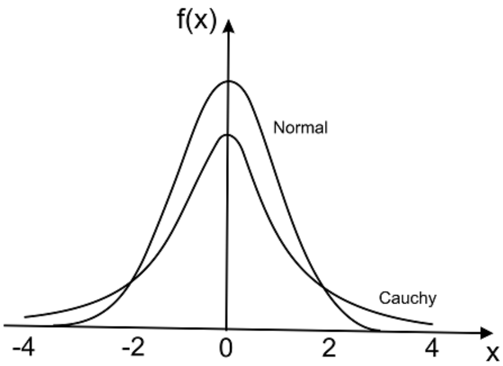


Figura 51. Gráfico representativo da distribuição densidade de probabilidade de Cauchy.

Medidas características

A distribuição teórica de probabilidade de Cauchy não tem média e nem variância [E(X) diverge], sendo assim o parâmetro de localização μ e o parâmetro de escala σ têm um significado diferente do habitual. De fato, μ representa a mediana, isto é indica o centro da distribuição.

i) **Mediana:** $P(X \leq \mu) = P(X \geq \mu) = \frac{1}{2}$

ii) **Quartis:**

ii.1) 1º Quartil

O 1º quartil é dado por $\mu - \sigma$

ii.2) 3º quartil

O 3º quartil é dado por $\mu + \sigma$

Isto é $P(X \leq \mu - \sigma) = P(X \geq \mu + \sigma) = \frac{1}{4}$

Distribuição de probabilidade de Pareto-Pareto $(\boldsymbol{\alpha})$

Generalidades

Esta é um modelo de distribuição de probabilidade frequentemente usada em estudos aplicados de economia principalmente em conexão com problemas de distribuição de rendas de populações.

Função densidade de probabilidade $[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]$

Dizemos que uma variável aleatória contínua tem distribuição de Pareto com parâmetros $\alpha > 0$ e $b > 0$, se sua função densidade de probabilidade [f.d.p.] é dada por:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{\alpha}{b}\left(\frac{b}{x}\right)^{\alpha+1}, & se\ x \geq b \\ 0, & se\ x < b \end{cases}$$

Na equação acima, b pode representar algum nível mínimo de renda, e X é o nível de renda e $f(X)\Delta X$ dá a proporção de indivíduos com renda entre X e $X + \Delta X$.

Podemos observar que a equação acima pode de $f(X)$ pode também ser escrita na seguinte forma.

$$f(X) = \begin{cases} \alpha b^{\alpha} X^{-\alpha-1}, & se\ X \geq b \\ 0, & se\ X < b \end{cases}$$

Gráfico da distribuição de probabilidade de Pareto

O gráfico da função densidade de probabilidade[f.d.p.] $f(X)$ está representado na figura 52 abaixo.

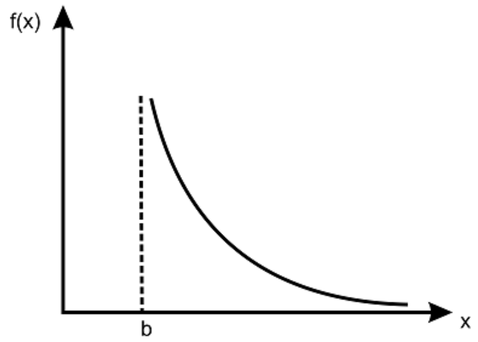


Figura 52. Gráfico representativo da distribuição densidade de probabilidade de Pareto.

Função geradora de momentos

A função geradora de momentos da distribuição de probabilidade de Pareto não existe, embora existam os momentos de ordem $r < \alpha$.

Pela definição de função geradora de momentos, temos:

$$m(t) = E(e^{tX}) = \alpha \int_{1}^{+\infty} \frac{e^{tX}}{x^{\alpha+1}} dx$$

Para t na vizinhança de zero, esta integral diverge na vizinhança de $+\infty$.

Assim, a função geradora de momentos não existe para a distribuição de Pareto. Contudo, esta distribuição tem alguns momentos de ordem superior, isto porque a seguinte expressão é verificada para este modelo de distribuição teórica de probabilidade.

$$E(X^r) = \alpha \int_{1}^{+\infty} \frac{X^r}{X^{\alpha+1}} dx = \alpha \int_{1}^{+\infty} X^{r-\alpha-1}\, dx = \alpha \frac{X^{r-\alpha}}{r-\alpha}\Big|_{1}^{+\infty}$$

A qual pode convergir se $r - \alpha < 0$. Desta maneira, verifica-se apenas os momentos de ordem $r < \alpha$, ou seja apenas estes existem.

Medidas características

i) Média: $E(X) = \frac{\alpha.b}{\alpha-1}, \quad para \quad \alpha > 1$

ii)Variância: $Var(X) = \frac{\alpha b^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$, para $\alpha > 2$

RELAÇÕES ENTRE AS DIVERSAS DISTRIBUIÇÕES

i) Se $v_1 = 1, F = t^2$ com v_2 graus de liberdade.

ii) Se $v_1 = 1$,, $v_2 = \infty$ obtêm-se $F = Z^2$ (Distribuição normal).

iii) Se $v_2 = \infty$ tem-se a distribuição de χ^2 com v_1 graus de liberdade.

iv) Se $v = \infty$, então $t_{(\alpha,\infty)} = z_{(\alpha)}$

v) Se na distribuição t de Student colocarmos $v = 1$, obteremos a distribuição de Cauchy, a qual é dada por $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, a qual não possui média ou esperança matemática $E(X)$.

vi) A soma de duas variáveis aleatórias uniformes independentes dá origem a uma variável aleatório com distribuição triangular (*triangular distribution*);

vii) A distribuição da soma de duas ou mais variáveis aleatórias exponenciais independentes X e Y, dá origem a uma distribuição de probabilidade gama (Gamma distribution);

viii) Quando n é suficiente grande, o cálculo das probabilidades relativas às distribuições hipergeométricas é utilizado como aproximação da distribuição binomial de parâmetro $P = \frac{n_1}{(n_1+n_2)}$. Na prática a aproximação é geralmente satisfatória se $n_1 + n_2 > 20n$ (ou mesmo $n_1 + n_2 > 10n$), se n_1 e n_2 forem suficientemente grandes em relação a n.

ix) No limite, quando p tende para 0, k tende para infinito e (kp) tende para λ, as distribuição binomial negativa tende para a distribuição de Poisson.

x) Relação da distribuição Exponencial com a distribuição de Poisson

Deve-se observar inicialmente que fixado um tempo, a probabilidade de não ocorrências de eventos neste intervalo é dado por: $f(0) = P(X = 0) = [(\lambda t)0e - \lambda t]/0! = e - \lambda t$.

Se a variável aleatória contínua T representar o tempo passado entre a ocorrência de dois eventos de Poisson, então a probabilidade da não ocorrência no tempo "t" é igual a probabilidade de que o tempo T entre ocorrências seja maior que "t", isto é: $P(T > t) = e - \lambda t$.

Tem-se ainda que: $P(T \leq t) = 1 - e - \lambda t$. Que conforme já visto é a função acumulada da variável aleatória exponencial de parâmetro λ, isto é: $F(t) = P(T \leq t) = 1 - e - \lambda t$.

Exercícios de aplicação

1) Defina variável aleatória (V.A.), variável aleatória discreta (V.A.D.), variável aleatória contínua (V.A.C.) e descreva diversos exemplos na sua área de estudo (Agronomia, Medicina veterinária, Zootecnia, Engenharia agrícola e ambiental, Engenharia de pesca, Engenharia de energia, Engenharia do

petróleo, Engenharia florestal, Engenharia mecânica, Ciências da computação, Administração, Ciências contábeis, Engenharia de produção).

2) Identifique as seguintes variáveis aleatórias como discretas ou contínuas:

i) O número de acidentes de automóveis em cada ano em uma cidade;

ii) A quantidade de leite produzida por uma vaca;

iii) O número de ovos postos por mês por uma galinha;

iv) O peso em gramas de grãos por hectare;

v) Profundidade de um poço;

vi) Quantidade de dinheiro (roubado) aguardando reclamação, em uma delegacia;

vii) Número de animais esperando atendimento em uma sala de emergência de um hospital veterinário;

viii) Total de gols feitos em um jogo de futebol;

ix) Total de reclamações recebidas por uma companhia de seguros, durante um dia;

x) Sua pressão sanguínea.

xi) A resistência de um determinado tipo de concreto

xii) O comprimento de 100 peixes Tilápias capturados em um açude

xiii) A produtividade em toneladas por hectare de cana-de-açúcar de uma usina

3) Suponha que 2% dos itens produzidos por uma fábrica sejam defeituosos. Encontre a probabilidade P e de existirem 3 defeituosos em uma amostra de 100.

4) Considere o lançamento simultâneo de dois tetraedros com faces numeradas: 1, 2, 3 e 4. Seja X uma variável aleatória que representa a soma dos números das faces em uma determinada posição:

i) Mostre a distribuição de probabilidade;

ii) Faça um gráfico da função de probabilidade;

iii) Calcule a probabilidade de obter-se soma de, no máximo 5.

5) Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + k, & se\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0, \text{em qualquer outro caso} \end{cases}$

Pede-se:

i) Encontre o valor de k na função para que $f(x)$ seja uma função de densidade de probabilidade (f.d.p);

ii) Encontre $P\ (1\ \leq\ x\ \leq\ 2)$ e $P\ (x\ \geq\ 2)$

6) Uma variável aleatória tem a seguinte densidade de probabilidade:

$$f\,(x) \;=\; 0 \qquad se \qquad x \;<\; 0$$

$$f\,(x) \;=\; kx^2 \qquad se \qquad 0 \;\leq\; x \;\leq\; 1$$

$$f\,(x) \;=\; 0 \qquad se \qquad x \;>\; 1$$

Pede-se: Determinar k e a função de repartição $[F(X)]$.

7) Um teste de múltipla escolha tem 5 questões com 4 opções das quais somente uma é correta. Um aluno que não estudou a matéria, responde ao teste. Pergunta-se, qual a probabilidade de ele acertar?

i) Pelo menos uma;

ii) No mínimo quatro;

iii) 3, 4, ou 5.

8) Uma firma determina o sexo de pintos de um dia com 95% de probabilidade. Se comprarmos 5 pintos tidos como de sexo feminino, qual é a probabilidade de que pelo menos um seja macho?

9) Um exame de estatística consta de 10 perguntas de igual dificuldade, sendo 5 a nota de aprovação, qual a probabilidade de que seja aprovado um aluno que sabe 40% da matéria?

10) Se 5% das reses de uma fazenda são doentes, achar a probabilidade que numa amostra de seis reses escolhidas ao acaso, tenhamos:

i) nenhuma doente;

ii) uma doente;

iii) mais do que uma doente.

11) Uma indústria, há uma média de 3 acidentes por mês. Qual a probabilidade de ocorrerem 2 acidentes no próximo mês? pelo menos um acidente por mês

12) Admitindo que em média 1 em 1000 pessoas tem determinado problema cardíaco, qual a probabilidade que em uma amostra aleatória de 3500 pessoas no máximo 3 pessoas com tal problema?

13) Em uma revisão tipográfica de um livro, acharam-se em média 1,5 erros por página. Das 800 páginas do livro, estimar quantas não precisam ser modificadas, por não apresentarem erros.

14) Usando a curva normal padronizada, determinar as áreas subtendidas entre os valores abaixo, com representação gráfica.

i) 0,35 e 0,00

ii) 0,00 e 1,52

iii) –0,34 e 1,97

iv) á direita de –1,91

v) á esquerda de 1,13

vi) á esquerda de –2,13

15) Dada uma distribuição normal com $\mu = 40$ e $\sigma = 6$, calcular:

i) $P\ (x \leq 33)$;

ii) $P\ (x \geq 29)$;

iii) $P\ (39 \leq x \leq 45)$;

iv) ponto que tem 58% da área acima dele;

v) O ponto que tem 5% da área acima;

vi) $P(z > 0)$;

16) Em um exame vestibular de matemática as notas distribuíram-se normalmente com média 6 o desvio padrão 1,5. Calcular o número de aprovados entre os 120 candidatos, sabendo-se que a nota mínima de aprovação é 5.

17) Na 1ª prova de Estatística a média foi 4,5 e o desvio padrão 2,3. Considerando o método científico de aprovação. Considere X é a nota média de cada aluno, e μ a nota média da turma.

Conceito A – nota média $\geq\ \mu + \sigma$

Conceito B – $\mu\ \leq$ nota média $\leq\ \mu + \sigma$

Conceito C – $\mu - \sigma\ \leq$ nota média $\leq\ \mu$

Conceito D – nota média $\leq\ -\mu - \sigma$

i) Quantos alunos receberam cada um dos conceitos?

ii) Quantos alunos foram aprovados (Conceito A, B e C)

iii) Quantos alunos foram aprovados com distinção (média $\geq \mu + 2\sigma$)

iv) Considerando o método comum de aprovação ($x \geq 5{,}00$), quantos foram reprovados?

18) Uma máquina de empacotar determinado produto apresenta variação de peso com desvio padrão de 20g. Em quanto deve ser regulado o peso médio do pacote para que apenas 10% tenham menos de 400g. Supor distribuição normal dos pesos dos pacotes.

19) Dada a distribuição discreta de probabilidade abaixo, calcule

i) $E(X)$

ii) $E[(X-m)^2]$

iii) $\{[E(X)+2-4E(X)]\}$

Tabela 15. Distribuição de probabilidade da variável aleatória discreta X.

X	0	1	2	3	4	5
P (X)	1/16	3/16	7/16	2/16	1/16	2/16

20) Ao investir num determinado negócio, um cidadão pode ter um lucro anual de US$ 60.000 com probabilidade 0,3 ou tomar um prejuízo de US$ 20.000 com probabilidade 0,7. Qual é a sua esperança matemática?

21) Seja x uma variável aleatória contínua, possuindo uma função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, para\ -2 \leq x \leq 2 \\ 0, \text{fora desse intervalo} \end{cases}$$

Calcular:

i) $E(x)$

ii) $E(x+2)$

iii) $E\ (x^2)$

iv) $E(\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3})$

v) $V(x)$

vi) D.P. (desvio padrão)

22) Encontrar a área sob a curva normal padronizada.

i) Entre $Z \pm 1{,}00, Z \pm 2{,}00, Z \pm 3{,}00$

ii) Entre $Z = 0{,}00$ e $Z = 0{,}88$

iii) Entre $Z = -1{,}60$ e $Z = 2{,}55$

iv) À esquerda de $Z = -1{,}60$

v) À direita de $Z = 2{,}55$

vi) À esquerda de $Z = -1{,}60$ e a direita de $Z = 2{,}55$.

23) Procure na tabela da distribuição teórica de t de "Student" os seguintes valores.

i) $t_{(0{,}05;8)}$

ii) $t_{(0{,}01;8)}$

iii) $t_{(0{,}05;5)}$

iv) $t_{(0{,}01;1)}$

Respostas: i) 2,306; ii) 3,355; iii) 2,571; iv) 63,657.

24) Encontre na tabela da distribuição de t de "Student" os seguintes valores.

i) $t_{(0{,}05)}$ para $v = 20$

ii) $t_{(0{,}025)}$ para $v = 10$

iii) $t_{(\alpha)}$ tal que $P\left(-t_{(\alpha)} < T < t_{(\alpha)}\right) = 0{,}90$ quando $v = 18$

iv) $t_{(0{,}99)}$ para $v = 18$

25) Use a tabela de Qui-quadrado (χ^2) para encontrar os Seguintes Quantis

i) O valor de $\chi^2_{(0{,}99)}$, com $v = 17$

ii) O valor de $\chi^2_{(0{,}975)}$, com $v = 28$

iii) O valor $\chi^2_{(\alpha)}$, tal que $P\left(\chi^2 < \chi^2_{(\alpha)}\right) = 0{,}95$ com $v = 4$

26) Procure na tabela da distribuição teórica de F-Snedecor os seguintes valores de F

i) $f_{(0{,}05)}$ com $V_1 = 8$ e $V_2 = 9$

ii) $f_{(0{,}05)}$ com $V_1 = 12$ e $V_2 = 6$

iii) $f_{(0{,}01)}$ com $V_1 = 24$ e $V_2 = 18$

iv) $f_{(0{,}95)}$ com $V_1 = 18$ e $V_2 = 24$

v) $f_{(0,99)}$ com $V_1 = 28$ e $V_2 = 10$

vi) $f_{(0,001;\,8;32)}$

vii) $f_{(0,005;\,6;10)}$

27) Suponha que apenas um em cada mil indivíduos, em uma população, seja albino; todo o resto tem pigmentação normal. Se uma amostra de 100 indivíduos é retirada ao acaso desta população, calcule, pela distribuição de Poisson, a probabilidade de que ela contenha:

i) Nenhum albino;

ii) Um albino;

iii) Dois albinos

iv) Três ou mais albinos.

28) O pelo preto da cobaia é dominante sobre o pelo branco. Em famílias de cinco descendentes onde ambos os pais são heterozigotos pretos, com que frequência poderíamos prever:

i) Três brancos e dois pretos;

ii) Dois brancos e três pretos;

iii) Um branco e quatro pretos;

iv) Todos brancos.

29) Sendo X normalmente distribuído com média 12 e desvio padrão 2, calcule a probabilidade de que:

i) $x > 14$;

ii) $x > 11$;

iii) $x < 10$;

iv) $x > 10$;

v) $10 < x < 13$.

30) A vida média de um pulverizador é de 6 anos com um desvio padrão de 2 anos. Se a amplitude da vida desde pulverizador pode ser tratada como variável normal e se o pulverizador estiver garantido, quanto tempo deve valer a garantia para que, no máximo 15 por cento dos pulverizadores falhem antes de expirar a garantia?

31) Sabendo-se que 10 por cento dos conjuntos de irrigação por aspersão da marca “IRRIGA TUDO” ficam defeituosos antes de espirar a garantia.

i) Qual a probabilidade de que um comerciante que vendeu 100 desses conjuntos seja forçado a substituir pelo menos 14 deles?

ii) Qual a probabilidade de que ele substitua pelo menos 5 e não mais de 14 dos conjuntos? Use a aproximação normal da distribuição binomial.

32) A probabilidade de que um animal bovino da raça "Gir" que foi submetido a uma operação cirúrgica sobreviver é 0,90. Qual é a probabilidade de que exatamente cinco dos próximos sete animais submetidos a mesma operação sobrevivam?

33) Numa empresa agropecuária de grande porte há uma média de 4 acidentes por mês. Qual é a probabilidade de acontecerem 2 acidentes no próximo mês?

34) A produção de 400 vacas da raça Holandês preto e branco da Fazenda Sertão tem média diária de 8,60 litros e desvio padrão de 3,00 litros/dia. Admitindo a produção como sendo normalmente distribuída, calcule:

i) Quantas vacas produzem acima de 10,40 litros/dia?

ii) Qual a probabilidade de obter vacas com produção abaixo de 6,60 litros/dia?

iii) Desejando-se eliminar as 15% de mais baixa produção, a partir de que produção devemos eliminar?

35) Utilizando a tabela da distribuição normal reduzida e a expressão $C = \frac{(Q_3 - Q_1)}{2(P_{90} - P_{10})}$, calcule a curtose dessa distribuição.

36) Uma certa região florestal foi dividida em 109 quadrados, para estudar a distribuição de Prímula sinenses. A priori, supomos que este tipo se distribua aleatoriamente na região. O quadro abaixo indica o número de quadrados com o respectivo número de Prímula sinenses.

Tabela 16. Distribuição de frequência das plantas de Prímula sinenses.

Plantas/Quadrado (X)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	>8
Número de Quadrados com X plantas	26	21	23	14	11	4	5	4	1	0

i) Se as plantas realmente se distribuem aleatoriamente na região, qual a probabilidade de encontrarmos pelo menos duas Prímulas?

ii) Quais as frequências esperadas para os valores $X = 0, X = 1 \; e \; X = 2$?

iii) Apenas comparando os resultados de b com as freqüências observadas, qual a conclusão que você chegaria?

37) Para a distribuição de frequência dos pesos de frangos em quilograma, apresentada abaixo, e utilizando a tabela de distribuição normal, verifique qual a percentagem de frangos abaixo da média menos dois desvios, os quais receberão ração suplementar e qual percentagem de frangos acima da média mais um e meio desvio padrão, que serão selecionados para reprodutores.

Tabela 17. Distribuição de frequências dos pesos em Kg dos frangos da granja X.

Peso (Kg)	F_i
1,00 ├── 1,20	60
1,20 ├── 1,40	160
1,40 ├── 1,60	280
1,60 ├── 1,80	260
1,80 ├── 2,00	160
2,00 ├── 2,20	80
Total	1000

38) Uma fonte radioativa foi observada durante 3000 períodos disjuntos de dois segundos cada. Verificou-se que o número médio de partículas emitidas em um período foi de 1,5 partículas. A tabela abaixo indica o momento de períodos com suas respectivas emissões.

Tabela 18. Distribuição de frequências da variável aleatória X: número de partículas radioativas emitidas.

Emissões	0	1	2	3	4	5	6
Período	702	977	710	402	153	48	8

i) Se a fonte emite partículas aleatoriamente, qual a distribuição que o fenômeno deve seguir?

ii) Qual a probabilidade de verificarmos pelo menos uma partícula em dois segundos?

iii) Calcule as frequências esperadas para os valores $X = 0, X = 1 \, e \, X = 2$. Compare com as observações e discuta essas comparações.

39) A distribuição de Poisson é dada pela equação, $P(x) = \frac{e^{-m}m^x}{x!}$, onde m é um parâmetro. Esta distribuição se aplica a acontecimentos relativamente raros, como ocorrências de geadas, de granizos, etc. Sendo m = 2 e média de geadas graves por década numa certa localidade, qual a probabilidade de não termos geadas graves na década de 1965 a 1974?

Essa probabilidade será:

$p = P(x = 0) = \frac{e^{-2}2^0}{0!} = \frac{1}{e^2} = \frac{1}{(2{,}718)^2} = 13{,}5\%.$

A probabilidade contrária, isto é, de termos pelo menos uma geada na década, será: $q = 1 - p = 100\% - 13{,}5\% = 86{,}5\%.$

40) Sendo $p = 0{,}51$ a probabilidade de ser uma criança do sexo masculino, qual a probabilidade de, em uma família de 5 filhos, 2 serem homens.

A distribuição aqui é a binomial, que nos dá:

$$p = 0{,}51, q = 0{,}49$$
$$p(x = 2) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$
$$p(x = 2) = \binom{5}{2}(0{,}51)^2(0{,}49)^{5-2}$$
$$p(x = 2) = \binom{5}{2}(0{,}51)^2(0{,}49)^3$$
$$p(x = 2) = 0{,}306$$
$$p(x = 2) = 30{,}6\%$$

A probabilidade de serem do sexo masculino todos os 5 filhos seria:

$$p(x = 5) = \binom{5}{5} p^5 q^{5-5}$$
$$p(x = 5) = \binom{5}{5} p^5 q^0$$
$$p(x = 5) = (0{,}51)^5$$
$$p(x = 5) = 3{,}45\%$$

41) Dada a distribuição de probabilidades $f(x) = kx^2(1 - x)$, para $0 \leq x \leq 1$, calcular o valor de k e determinar a probabilidade de termos $0 \leq x \leq 0{,}2$.

O valor de k se calcula a partir da equação

$$\int_0^1 K\, x^2\, (1 - x)\, d x = 1$$

pois isto equivale a escrever $m(x) = 1$. Daí teremos:

$$K \int_0^1 x^2\, (1 - x)\, d x = 1$$

Mas $\int x^2 \,(1 - x)\, d\,x \;=\; \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + C,$

logo

$$\int_0^1 x^2\,(1 - x)\;d\,x \;=\; \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right] = \frac{1}{12}.$$

Resulta que

$$K\frac{1}{12} = 1, \quad \therefore\; K \;=\; 12.$$

A probabilidade pedida é:

$$P = \int_0^{0,2} 12\,x^2\,(1 - x)\;\;d\,x$$

$$P \;=\; 12\,\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{0,2}$$

$$P = 0{,}0272 = 2{,}7\%$$

42) Na distribuição f(x) $=\frac{1}{4}X$ para $1 \leq X \leq 3$, calcular a probabilidade de termos X no intervalo $[1{,}00;\; 1{,}50]$, isto é $1{,}00 \leq X \leq 1{,}50$.

$$p(1{,}00 \leq X \leq 1{,}50) = \frac{1}{4}\int_{1,00}^{1,50} X\;d\,x$$

$$p(1{,}00 \leq X \leq 1{,}50) = \frac{1}{4}\left[\frac{X^2}{2}\right]_{1,00}^{1,50}$$

$$p(1{,}00 \leq X \leq 1{,}50) = \frac{1{,}25}{8}$$

$$p(1{,}00 \leq X \leq 1{,}50) = 15{,}6\%$$

43) Numa distribuição binomial temos $p \;=\; \frac{1}{4}, n \;=\; 10$. Qual a probabilidade de termos $x \;=\; 2$ ou 3? Temos aqui dois conjuntos $A \;=\; \{2\}, B \;=\; \{3\}$, que são disjuntos, logo $P(A \;+\; B) \;=\; P(A) \;+\; P(B)$.

$$P(A) = P(X = 2) = \binom{10}{2}\;p^2\;q^{10-2} = 45(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^{10-2}$$

$$P(A) = P(X = 2) = \binom{10}{2}\;p^2\;q^{8} = 45(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^{8}$$

$$P(B) = P(X = 3) = \binom{10}{3}\ \mathrm{p}^3\ \mathrm{q}^{10\text{-}3} = 120\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{10-3}$$

$$P(B) = P(X = 3) = \binom{10}{3}\ \mathrm{p}^3\ \mathrm{q}^7 = 120\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^7$$

$$P(A + B) = P(x = 2\text{ou}3) = 45\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^8 + 120\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^7.$$

$$P(A\ +\ B)\ =\ 30\%$$

44) Exercícios diversos resolvidos sobre distribuições teóricas de probabilidades da Bernoulli, Binomial, Normal, Qui – Quadrado, e t de Student.

DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI

$$P(X = x) = px(1-p)^{1-x} \text{ para } x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Exercício 1

Seja $x = 1$ a ocorrência de uma fêmea em um nascimento de um bovino e $x = 0$ a ocorrência de macho. Determine a distribuição de probabilidade de x.

Gametas ♀	Gametas ♂	
	$1/2\,X$	$1/2\,Y$
X	$\frac{1}{2}XX$ (♀)	$\frac{1}{2}XY$ (♂)

As fêmeas (XX) ocorrerão em 50% das vezes. Logo, a variável X é uma variável aleatória de Bernoulli com parâmetro $P = 1/2$.

A distribuição de probabilidade da variável X é dada por.

X_i	$P(X_i)$
0	1/2
1	1/2
Soma	2/2 = 1,0

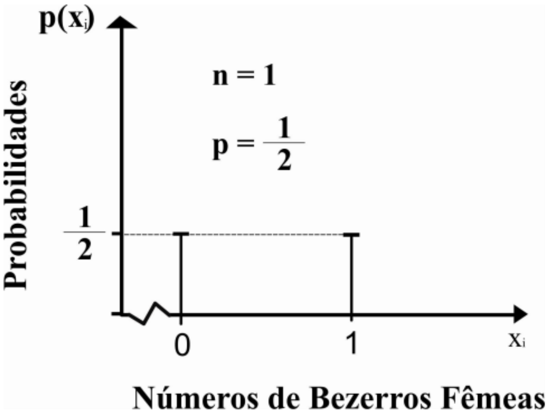
As medidas parâmetros média, variância e desvio padrão são:

$$E(x) = p = 1/2;$$

$$Var(X) = \sigma_x^2 = Pq = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4 = 0,25 \text{ e o}$$

$$D.P. = \sigma_X = \sqrt{0,25} = 0,50$$

O Gráfico da distribuição teórica de probabilidade é dado por:



Exercício 2

Considere o jogo que consiste no lançamento de um dado (hexaedro) honesto e em que se ganha se sair a face 6 voltada para cima. Seja X a variável aleatória que representa o número de vitórias obtidas num lançamento. Indique qual é a distribuição de probabilidade da variável X.

O resultado do lançamento pode ser Sucesso (sair face 6 voltada para cima) ou insucesso (não sair a face 6). No primeiro caso $X = 1$, enquanto no segundo $X = 0$. Além disso, a probabilidade de sucesso é $P = 1/6$.

Conclusão:

X ~ Bernoulli $(P = 1/6)$, ou seja, X tem distribuição de probabilidade de Bernoulli com Parâmetro P igual a $1/6$.

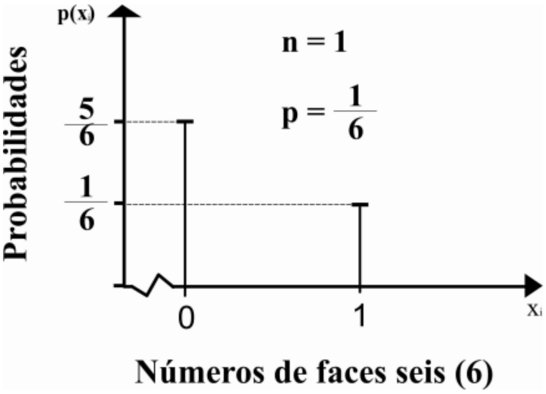
$\boldsymbol{X_i}$	$\boldsymbol{P(X_i)}$
0	$q = 1 - P = 1 - 1/6 = 5/6$
1	$P = 1/6$
SOMA	$6/6 = 1$

Os parâmetros média, variância e desvio padrão são dados por:

$$E(x) = p = 1/6$$

$$Var(X) = \sigma_X^2 = Pq = 1/6\,(1 - 1/6) = 5/36 = 0,139 \text{ e o}$$

$$D.P. = \sigma_X = \sqrt{0,139} == 0,373$$



DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

$$P(X = x_i) = C_x^n p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x},$$

onde

$$x = \{0,1,2,\ldots,n\} \quad \text{e} \quad C_x^n \frac{n!}{x!(n-x)!},$$

sendo

$$p + q = 1, \; q = 1 - p,$$

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + \cdots + P(X = n) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$$

Exercício de Aplicação

É sabido de experimentos anteriores que a probabilidade de nascer bezerros natimortos em partos de um rebanho bovino da raça nelore no RN é P = 10%. Se um médico veterinário realiza 5 partos nesse rebanho, então responda:

$P = 0,10$

$q = 0,90$

$n = 5$

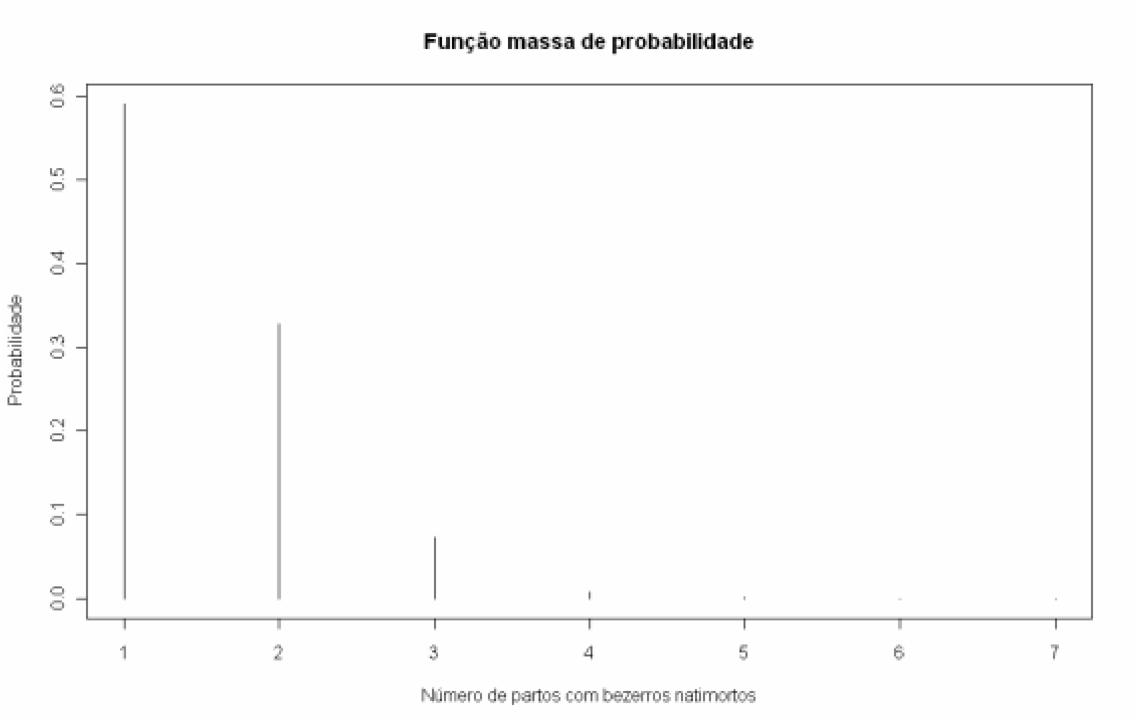
$k = X = 3$

$X =$ número de natimortos

$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$X \cap B\ (5;\ 0,10)$

Gráfico em Hastes ou Bastão da distribuição de probabilidade.



a) Qual a probabilidade de ocorrerem, por acaso, 3 bezerros natimortos em 5 partos observados?

$$P(x=3) = C_3^5 (0{,}10)^3 (0{,}9)^{5-3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!}(0{,}10)^3(0{,}9)^2$$

$$P\ (x\ =\ 3)\ =\ 10 \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}81\ =\ 0{,}0081\ =\ 0{,}81\%$$

b) Qual a probabilidade de ocorrer pelo menos um natimorto nos 5 partos observados?

$$P(x \geq 1) = 1 - [P(x=0)] = 1 - C_0^5 (0{,}10)^0 (0{,}9)^{5-0} = 1 - 0{,}59049 = 0{,}40951 \cong 40{,}95\%$$

c) Em $n\ =\ 50$ partos observados, qual o número médio esperado de natimortos?

$$E(x) = \mu_x = 50 \cdot 0{,}10 = 5 \text{ natimortos}$$

d) E em $n = 2000$ partos observados, qual o número médio esperado de natimortos?

$$E(x)\ =\ 2000 \cdot 0{,}10\ =\ 200 \text{ natimortos}$$

e) Qual o desvio padrão em (c)?

$$\begin{cases} p = 0{,}10 \\ q = 0{,}90 \end{cases}$$

$$\sigma_x = \sqrt{50 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}90} = 2{,}12 \text{ natimortos}$$

f) Qual o número médio de partos com natimortos?

$$E(x) = 5 \cdot 0{,}10 = 0{,}5 \text{ parto}$$

g) Qual é o desvio padrão do número de partos com bezerros natimortos?

$$D.P._{(x)} = \sigma_{(X)} = \sqrt{5 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}90} = \sqrt{0{,}45} = 0{,}6708 \cong 0{,}67 \text{ partos com natimortos}$$

h) Qual é a probabilidade de ocorrer nenhum parto com bezerro natimorto?

$$P(X = 0) = C_0^5 (0{,}10)^0 (0{,}90)^{5-0} = \frac{5!}{0!\,(5-0)!} 1 \cdot (0{,}90)^5 = 1 \cdot 1 \cdot (0{,}90)^5 = 0{,}59049 \cong 59{,}05\%$$

i) Qual é a probabilidade de que nasçam em todos os partos bezerros natimortos?

$$P(X = 5) = C_5^5 (0{,}10)^5 (0{,}90)^{5-5} = \frac{5!}{5!\,(5-5)!} (0{,}10)^5 (0{,}90)^0 = 1 \cdot (0{,}10)^5 \cdot 1 = 0{,}00001 \cong 0{,}001\%$$

j) Qual é a probabilidade de que nasçam bezerros natimortos em apenas um parto?

$$P(X = 1) = C_1^5 (0{,}10)^1 (0{,}90)^{5-1} = \frac{5!}{1!\,(5-1)!} (0{,}10)^1 (0{,}90)^4 = 5 \cdot (0{,}10)^1 \cdot (0{,}6561) = 0{,}32805 \cong 32{,}81\%$$

k) Qual é a probabilidade de que se observem menos de nenhum parto com bezerros natimortos?

$$P(X < 0) = P(\emptyset) = 0 = 0\%$$

l) Qual é a probabilidade de que se observem mais de cinco partos com bezerros natimortos?

$$P(X > 5) = P(\emptyset) = 0 = 0\%$$

m) Inverso da função de probabilidade acumulativa - Um exemplo contrário ao anterior é quando você fornece um valor de probabilidade e pretende calcular o valor de X associado a ele. Para isso usa-se o seguinte procedimento. Por exemplo, Qual o valor de X obtido (número de partos com bezerros natimortos) associado à probabilidade de 0,74?

$$0{,}74 = C_X^5 (0{,}10)^X (1 - 0{,}10)^{5-X} = \frac{5!}{X!\,(5-X)!} (0{,}10)^X (0{,}90)^{5-X}$$

$$X = 1 \text{ parto com bezerro natimortos}$$

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

$$P[X = x] = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{\lambda^x}{x!}\exp(-\lambda)$$

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + \cdots + P(X = 10) + \cdots = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$$

onde $\mu = \lambda t = \lambda I$; $e = 2{,}71828$ sendo $x = \{0{,}1{,}2, \ldots, \infty\}$.

Exercício de Aplicação

O número de árvores da espécie enterolobium glaziovii benth (nome vulgar timbaúba), se distribui aleatoriamente em certa reserva florestal de mata atlântica localizada no litoral da região do Nordeste Brasileiro com uma média de duas (2) árvores por hectare. Foi testada em 2010 e comprovada que esta variável aleatória discreta X possui distribuição de Poisson.

X é o número de árvores de timbaúba, então $X = \{0, 1, 2, \ldots, \}$.

$E(X) = \mu, = \lambda = 2$ árvores por hectare.

$$P[X = x] = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{\lambda^x}{x!}\exp(-\lambda)$$

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + \cdots + P(X = 10) + \cdots = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$$

a) Qual é a probabilidade de se encontrar por acaso cinco (5) árvores de Timbaúba por hectare?

b) Qual é a probabilidade de se contarem no máximo duas (2) árvores de Timbaúba por hectare?

c) Qual é a probabilidade de se localizar uma (1) árvore de Timbaúba em dois hectares? $\lambda = 2$ sendo que $\mu = 2 \cdot 2 = 4$ árvores.

d) Qual é o valor da média?

e) Qual é o valor da variância?

f) Qual é o valor do desvio padrão?

g) Calcule $P(2 \leq X \leq 4)$;

h) Calcule $P(2 < X < 4)$;

i) Determine $P(X \geq 1)$;

j) Calcule $P(1 \leq X < 5)$;

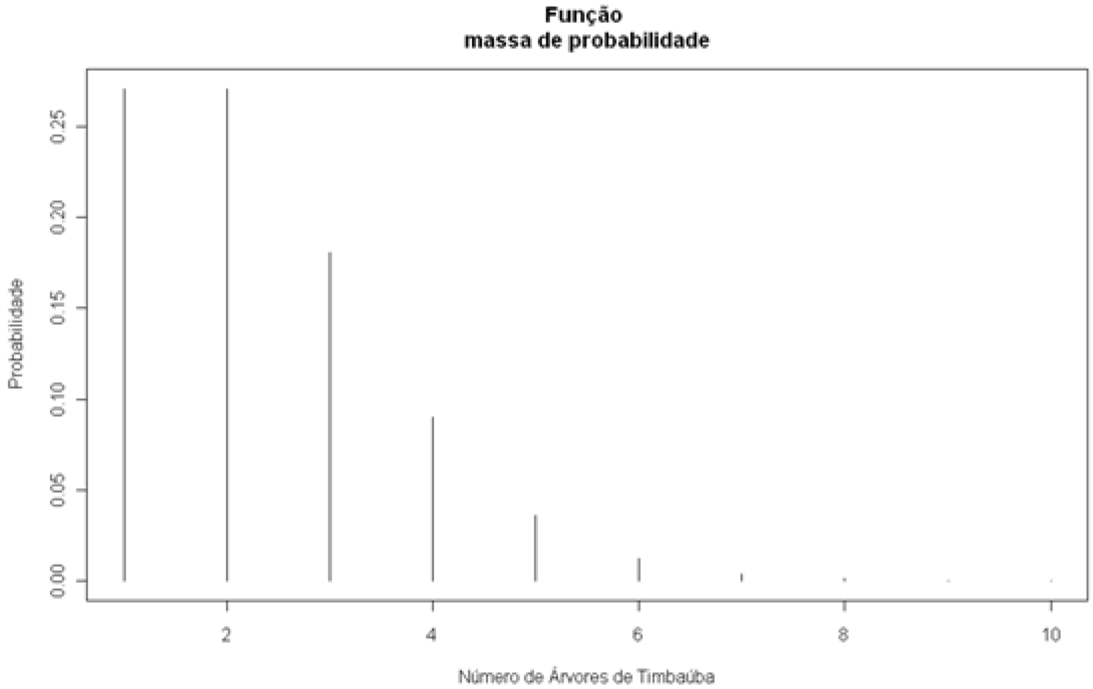
k) Inverso da função de probabilidade acumulativa - Um exemplo contrário ao anterior é quando você fornece um valor de probabilidade e pretende calcular o valor de X associado a ele. Para isso usa-se o seguinte procedimento. Por exemplo, Qual o valor de X (número de árvores de Timbaúba) associado à probabilidade de 0,99?

$$P[X = x] = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$\lambda = ?$$

$$X = ?$$

Gráfico em Hastes ou Bastão da distribuição de probabilidade.



a) $P[X = 5] = \frac{2^5 e^{-2}}{5!} = \frac{32 \cdot 0{,}135335283}{120} = 0{,}036089408 \cong 3{,}61\%$

b) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$P[X \leq 2] = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 e^{-2}}{1!} + \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = 0{,}135335283 + 0{,}270670566 + 0{,}270670566$$
$$= 0{,}676676415 \cong 67{,}67\%$$

c) $\lambda = 4$; 1 ha ---------2 àrvores

2 ha-------- λ

$\lambda = 4$ Árvores

ou ainda: $E[X] = \lambda = \mu \cdot I = 2 \cdot 2 = 4$ árvores.

$$P[X=1]=\frac{4^1e^{-4}}{1!}=\frac{4\cdot 0{,}018315638}{1}=0{,}073262555\cong 7{,}33\%$$

d) $E[X]=\mu_X=\mu=\lambda=2$ Árvores de Timbaúba/Hectare

e) $Var[X]=\sigma_X^2=2$ [Árvores de Timbaúba/Hectare]^2

f) $D.P.=\sigma_X=\sqrt{2}=1{,}414$ Árvores de Timbaúba/Hectare

g) $P(4\leq X\leq 4)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$

$$P(4\leq X\leq 4)=\frac{2^2e^{-2}}{2!}+\frac{2^3e^{-2}}{3!}+\frac{2^4e^{-2}}{4!}$$

$$=\frac{4\cdot 0{,}135335283}{2}+\frac{8\cdot 0{,}135335283}{6}+\frac{16\cdot 0{,}135335283}{24}$$

$$=0{,}270670566+0{,}180447044+0{,}090223522=0{,}541341132\cong 54{,}13\%$$

h) $P(2<X<4)=P(x=3)=\frac{2^3e^{-2}}{3!}=0{,}180447044\cong 18{,}04\%$

i) $P(1\leq X\leq 5)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$

j) $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\frac{2^0e^{-2}}{0!}=1-0{,}135335283=0{,}864664717\cong 86{,}47\%$

k)

$P[X=x]=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{\mathrm{x!}},\lambda\ =?$ e $X\ =?, 0{,}99=\frac{2^x e^{-2}}{\mathrm{x!}}\therefore x=6$ árvores de Timbaúba

APROXIMAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL ATRAVÉS DA DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Exercício de Aplicação

A probabilidade de uma determinada marca de arado de disco agrícola apresentar defeitos nos seus discos é 0,012. Ao se examinar ao acaso um lote de 80 arados: a) Qual é a probabilidade de não haver nenhum defeito; b) Qual é a probabilidade de haver pelo menos um defeituoso?

$$n = 80;\ P = 0{,}012;\ q = q - P = 1 - 0{,}012 = 0{,}988$$
$$X = \{0,1,2,3,\ldots,80\}$$

a) A probabilidade procurada é

$$P(x = 0) = \binom{80}{0}(0{,}012)^0(0{,}988)^{80-0} = (0{,}988)^{80} = 0{,}380676 \cong 38\%$$

Como n é grande e P é pequeno neste caso, a aproximação de Poisson dá os seguintes resultados,

$$\mu = \lambda = nP = 80.\,0{,}012 = 0{,}96$$
$$P(x = 0) = \frac{(0{,}96)^0 e^{-0{,}96}}{0!} = 0{,}3828928 \cong 38\%$$

Resultado este muito próximo da resposta exata.

b) $P(x \geq 1) = 1 - [P\ (x = 0)] = 1 - 0{,}380676 = 0{,}619324 \simeq 62\%$

$P\ (x \geq 1) = 1 - 0{,}3828928 = 0{,}617107114 \simeq 61{,}71\% \simeq 62\%$

DISTRIBUIÇÃO NORMAL, GAUSSIANA, SIMÉTRICA, EM FORMA DE SINO, EM FORMA DE CAMPÂNULA (CAMPANULAR), EM FORMA DE CHAPÉU DE NAPOLEÃO

O peso vivo ao nascer em quilogramas de bezerros da raça guzerá de um rebanho explorado no município de Mossoró-RN, em 2012, distribui-se normalmente com uma média m = 27,0 kg e um desvio padrão s = 1,2 kg. Se um animal é escolhido ao acaso, responda o seguinte.

i) Determinar a probabilidade (área) ou a porcentagem de bezerros que pesam.

a) Mais que 28 kg

Ou ainda se for escolhido através de um sorteio ou ao acaso, um bezerro dessa raça, qual é a probabilidade de ele nascer pesando pelo menos ou no mínimo 28 quilogramas? E qual é a probabilidade de dois bezerros selecionados ao acaso nascerem pesando pelo menos 28 quilogramas de peso vivo?

b) Entre 26,0 e 27,5 kg

c) Menos que 26,0 kg

d) Acima da média μ = 27,00 kg, ou acima do peso médio do rebanho ou da raça.

ii) Qual deve ser o peso médio dessa raça para que apenas 10% dos animais tenham menos de 25 kg de peso? (Isto é, sabe-se que 10% dos pesos são inferiores a 25 kg).

iii) Num exame de um rebanho com $n = 200$ animais dessa raça, quantos são esperados (n') com peso acima de 28 kg? Isto é $n' = (n).[P(X \geq 28\, kg)]$.

iv) Quais as abscissas dos pontos de inflexão? O que significam?

v) Qual é a probabilidade de um peso diferir da média de mais da metade do desvio padrão? Ou seja, ser maior (está acima) de meio desvio padrão da média?

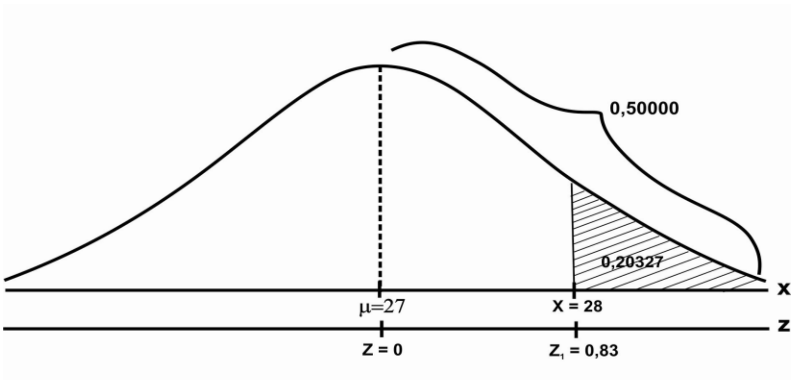
vi) Qual é o peso (X) que delimita os 5% mais pesados?

vii) Quais os valores dos pesos vivos em quilogramas (X_1 e X_2) dos bezerros da raça Guzerá, que delimitam 95% dos pesos do rebanho, isto, é, quais os limites do intervalo que comporta 95% dos pesos do rebanho dessa raça bovina? Ou seja, pede-se a $P(X_1 \leq X \leq X_2) = 95\%$.

Respostas:

i)

a)



$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{28{,}0-27{,}0}{1{,}20} = 0{,}83$$

$$P(X \geq 28) = P(Z \geq 0{,}83) = 0{,}5000 - P(0 \leq Z \leq 0{,}83) = 0{,}5000 - 0{,}29673$$

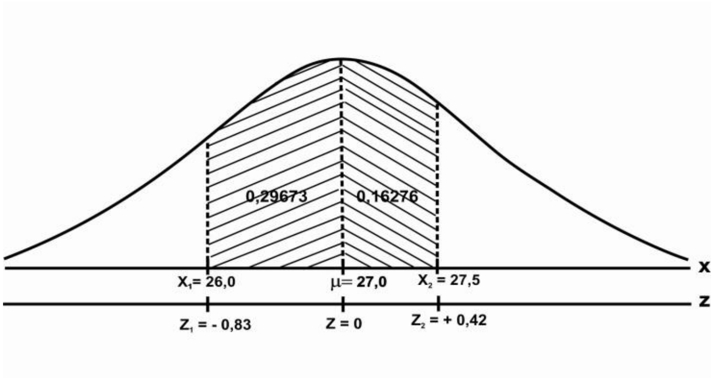
$$P(X \geq 28) = P(Z \geq 0{,}83) = 0{,}20327 = 20{,}327\%$$

$$P(X \geq 28) = P(Z \geq 0{,}83) = 0{,}20327 = 20{,}327\%$$

Para dois bezerros temos que:

$$P(X \geq 28/2 \quad bezerros) = P(Z \geq 0{,}83).P(Z \geq 0{,}83) = (0{,}20327).(0{,}20327) = 0{,}0413318692 \cong 4{,}13\%$$

b)



$$P(26{,}0 \le X \le 27{,}5) = ?$$

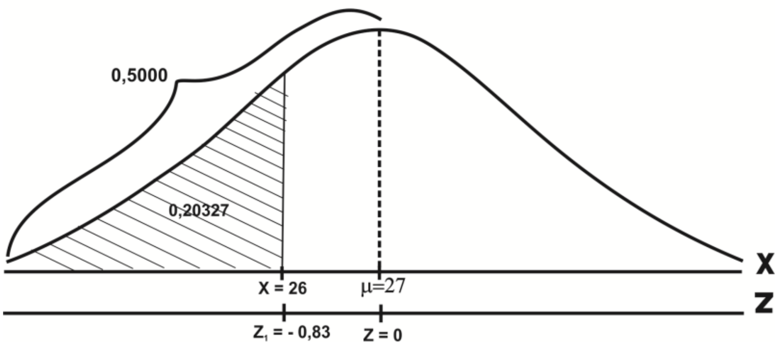
$$Z_1 = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{26{,}0 - 27{,}0}{1{,}20} = -\ 0{,}83$$

$$Z_2 = \frac{27{,}5 - 27{,}0}{1{,}20} = +\ 0{,}42$$

$$P(26{,}0 \le X \le 27{,}5) = P(-0{,}83 \le Z \le 0{,}42) = P(-0{,}83 \le Z \le 0{,}00) + P(0{,}00 \le Z \le 0{,}42)$$

$$P(26{,}0 \le X \le 27{,}5) = 0{,}29673 + 0{,}16276 = 0{,}45949 = 45{,}949\%$$

C) $P(X \le 26{,}0kg) = ?$



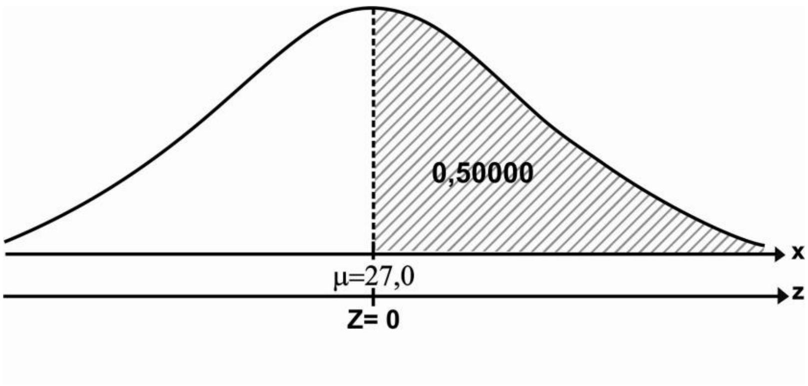
$$Z = \frac{26{,}0 - 27{,}0}{1{,}20} = -0{,}83$$

$$P(X \le 26{,}0) = P(Z \le -0{,}83) = 0{,}5000 - P(-0{,}83 \le Z \le 0{,}00)$$

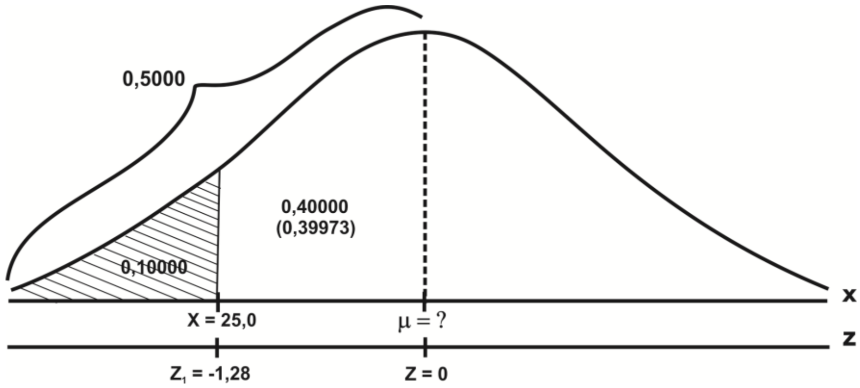
$$P(X \le 26{,}0) = P(Z \le -0{,}83) = 0{,}5000 - 0{,}29673 = 0{,}20327 = 20{,}327\%$$

d) $P(X \ge 27{,}0) = P(Z \ge 0{,}00) = 0{,}5000 = 50\%$

$$Z = \frac{27{,}0 - 27{,}0}{1{,}20} = 0{,}00$$



II) $\mu = ?$



0,40000	**0,40147**
0,39973	**0,40000**
0,00027	**0,00147**

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \quad \therefore Z\sigma = X - \mu \therefore -\mu = Z\sigma - X(-1)$$

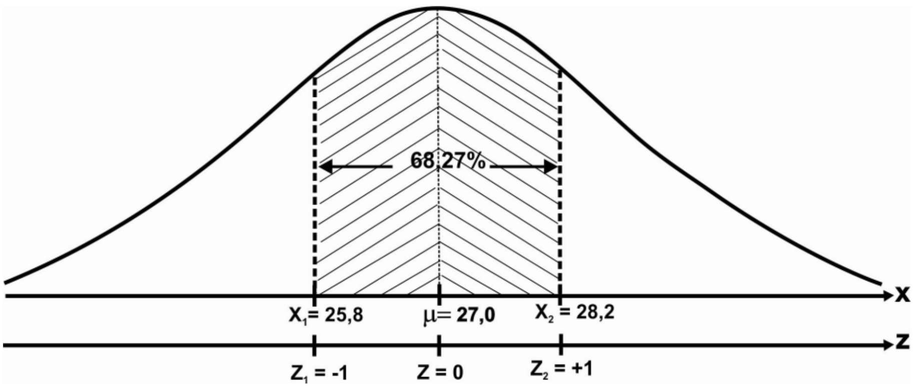
$\mu = X - Z\sigma$, $\quad \mu = 25{,}0 - (-1{,}28).1{,}20$; $\quad \mu = 26{,}536 \quad kg$

III) $n = 200$; $n' = ?$

$n' = n.P(X \geq 28{,}0\ kg)$; $n' = 200.0{,}20327 = 40{,}654 \approx 41$ Bezerros

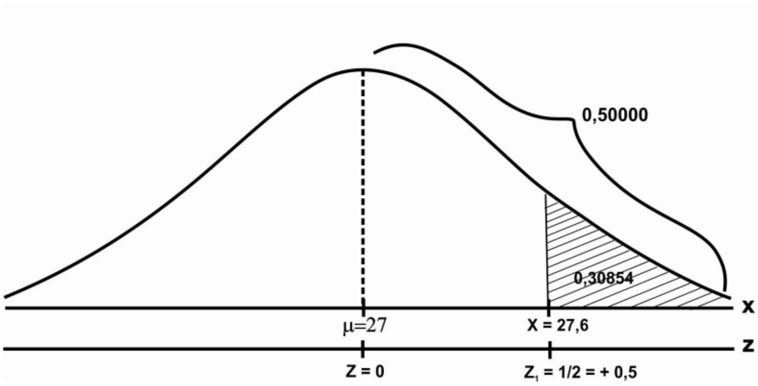
IV) $P_1 = \mu - \sigma = 27{,}0 - 1{,}20 = 25{,}8\ kg$

$P_2 = \mu + \sigma = 27{,}0 + 1{,}20 = 28{,}2\ kg$



Interpretação: 68,27% dos pesos vivos ao nascer em quilogramas dos bezerros da raça Guzerá explorados nesta região, estão compreendidos ou variam de 25,8 kg a 28,2 kg.

V) $P(Z \geq 0{,}5) = ?$



$$X = \mu_X + \frac{1}{2}\sigma = 27{,}0 + \frac{1}{2}.1{,}20$$

$$X = 27{,}0 + 0{,}6 = 27{,}6$$

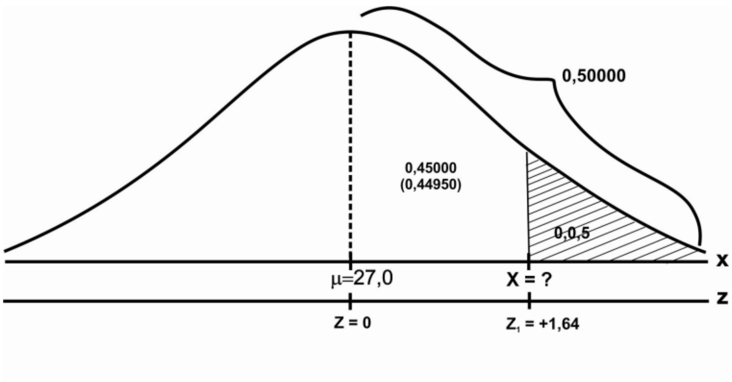
$$Z = \frac{27{,}5 - 27{,}0}{1{,}20} = 0{,}5$$

$$P\left[(X - \mu_X) \geq \frac{1}{2}\sigma\right] = P[(X - 27{,}0) \geq 0{,}6] = P(Z \geq 0{,}5) = 0{,}5000 - P(27{,}0 \leq X \leq 27{,}6)$$

$$P\left[(X - \mu_X) \geq \frac{1}{2}\sigma\right] = P(Z \geq 0{,}5) = 0{,}5000 - P(0 \leq Z \leq +0{,}5) = 0{,}5000 - 0{,}19146 = 0{,}30854$$

$$P\left[(X - \mu_X) \geq \frac{1}{2}\sigma\right] = P(Z \geq 0{,}5) = 0{,}30854 \cong 30{,}85\%$$

VI) $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$



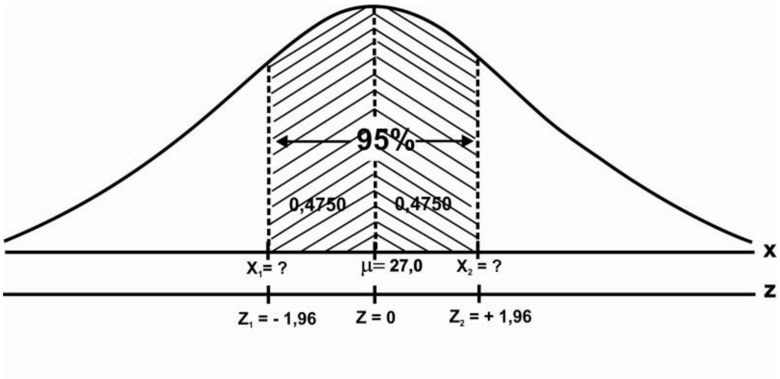
$X - \mu = Z\sigma$; $X = \mu + Z\sigma$;

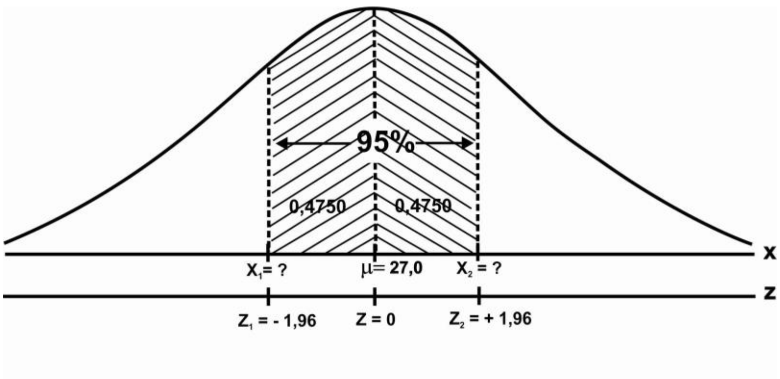
0,45053		0,45000
0,45000	;	0,44950
0,00053		0,00050

$X = 27{,}0 + 1{,}64.1{,}20$

$X = 27{,}0 + 1{,}968$; $X = 28{,}968\ kg$

VII) $P(X_1 \leq X \leq X_2) = 95\%$





$Z = \dfrac{[X - \mu]}{\sigma}$; $X - \mu = Z\sigma$; $X = \mu + Z\sigma$; $X_i = \mu + Z\sigma$

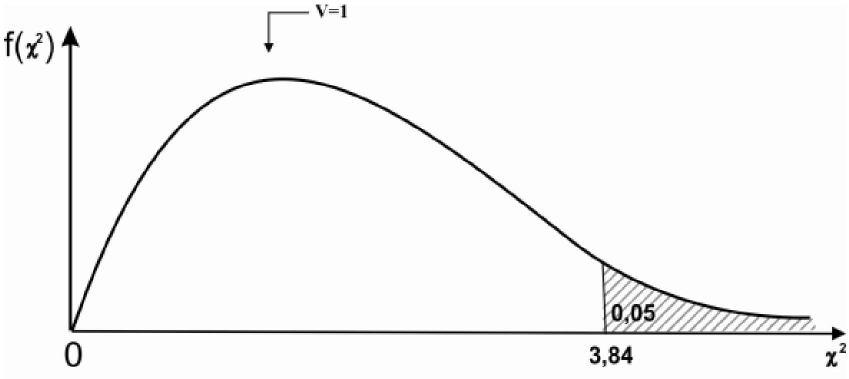
$X_1 = 27 + (-1{,}96)(1{,}20)$; $X_1 = 27 - 2{,}352 = 24{,}648\ Kg$;

$$X_2 = 27 + (+1,96)(1,20); \quad X_2 = 27 + 2,352 = 29,352\ Kg$$

DISTRIBUIÇÃO QUI – QUADRADO (χ^2).

1) Qual é o valor Crítico ou Tabelado sob a curva da distribuição teórica de probabilidade de Qui–Quadrado (χ^2) que com $v = 1$ grau de liberdade deixa uma área à direita dele de 5 %?

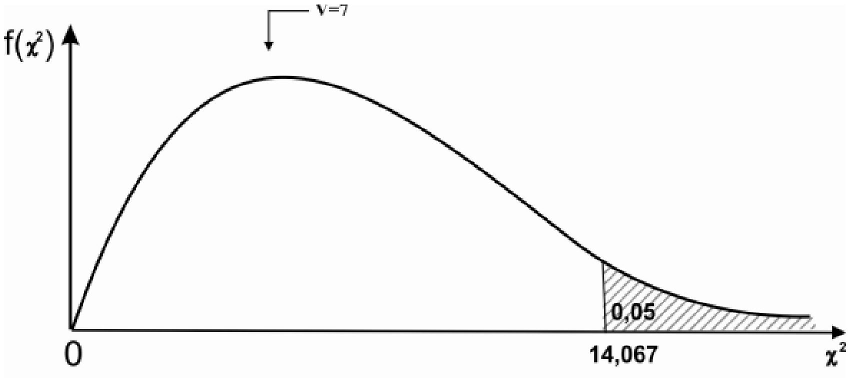
$$P\left(\chi^2_{CALCULADO} \geq \chi^2_{TABELADO}\right) = \int_{\chi^2_{CAL}}^{\infty} f\left(\chi^2\right) d\chi^2 = \int_{3,84}^{\infty} f\left(\chi^2\right) d\chi^2 = 0,05 = 5\%$$



$$\chi^2_{(1;0,05)} = 3,84$$

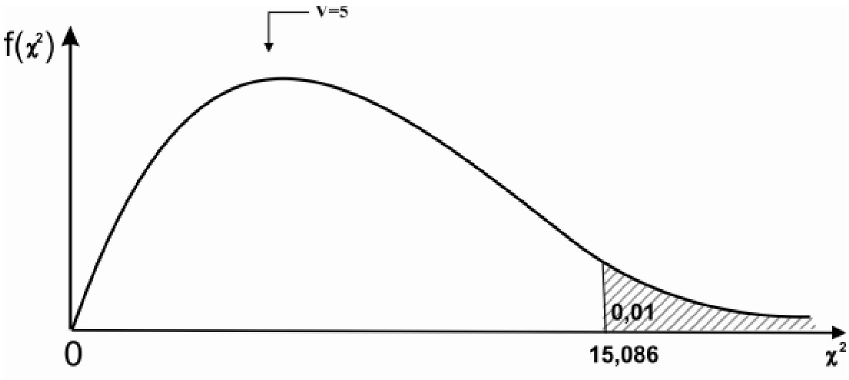
2) Qual é o valor Crítico ou Tabelado sob a curva da distribuição teórica de probabilidade de Qui–Quadrado (χ^2) que com $v = 7$ graus de liberdade deixa uma área à direita dele de 5 %?

$$\chi^2_{(7;0,05)} = 14,067$$



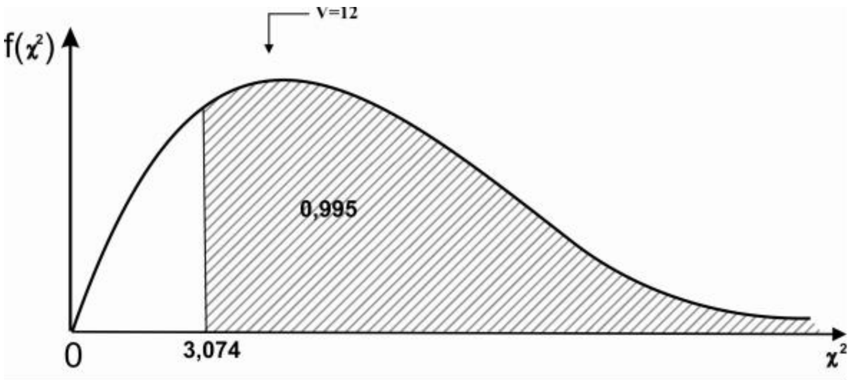
3) Qual é o valor Crítico ou Tabelado sob a curva da distribuição teórica de probabilidade de Qui–Quadrado (χ^2) que com $v = 5$ graus de liberdade deixa uma área à direita dele de 1 %?

$$\chi^2_{(5;0,01)} = 15,086$$



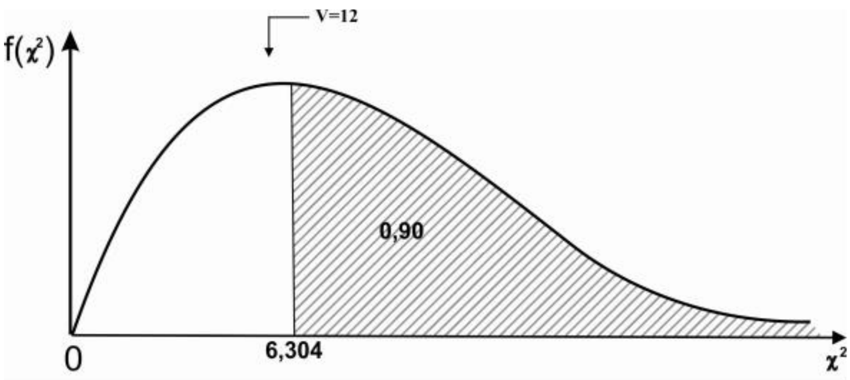
4) Qual é o valor Crítico ou Tabelado sob a curva da distribuição teórica de probabilidade de Qui–Quadrado (χ^2) que com $v = 12$ graus de liberdade deixa uma área à direita dele de 99,5%?

$\boldsymbol{\chi^2_{(12;0,995)} = 3{,}074}$



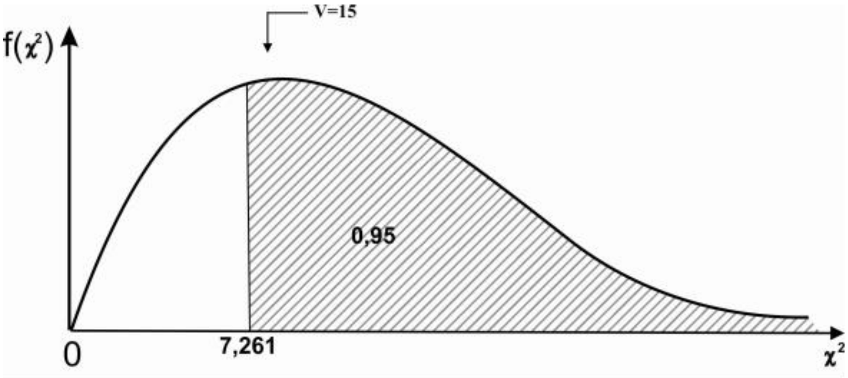
5) Qual é o valor Crítico ou Tabelado sob a curva da distribuição teórica de probabilidade de Qui–Quadrado (χ^2) que com $v = 12$ graus de liberdade deixa uma área à direita dele de 90 %?

$\boldsymbol{\chi^2_{(12;0,90)} = 6{,}304}$



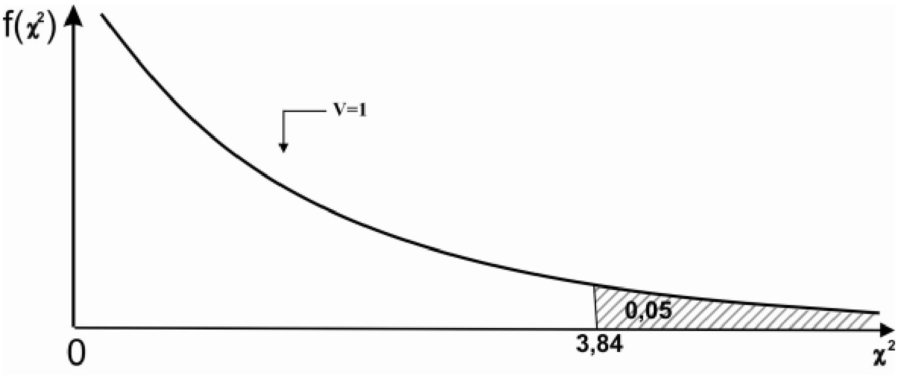
6) Qual é o valor Crítico ou Tabelado sob a curva da distribuição teórica de probabilidade de Qui–Quadrado (χ^2) que com $v = 15$ graus de liberdade deixa uma área à direita dele de 95 %?

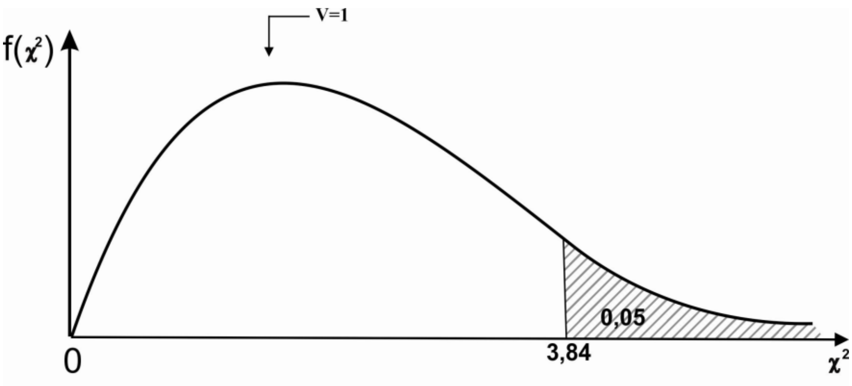
$\chi^2_{(15;0,95)} = \mathbf{7,261}$



7) Qual é o valor Crítico ou Tabelado sob a curva da distribuição teórica de probabilidade de Qui–Quadrado (χ^2) que com $v = 1$ grau de liberdade deixa uma área à direita dele de 5 %?

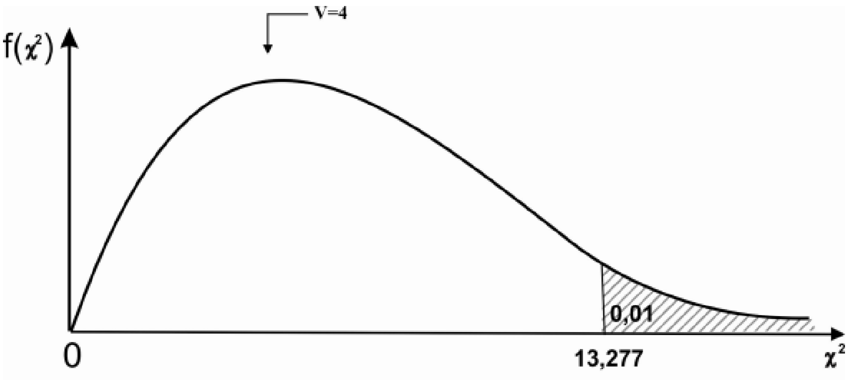
$\chi^2_{(1;0,05)} = \mathbf{3,84}$





8) Qual é o valor Crítico ou Tabelado sob a curva da distribuição teórica de probabilidade de Qui – Quadrado (χ^2) que com $v = 4$ graus de liberdade deixa uma área à direita dele de 1 %?

$\chi^2_{(4;0,01)} = \mathbf{13,277}$



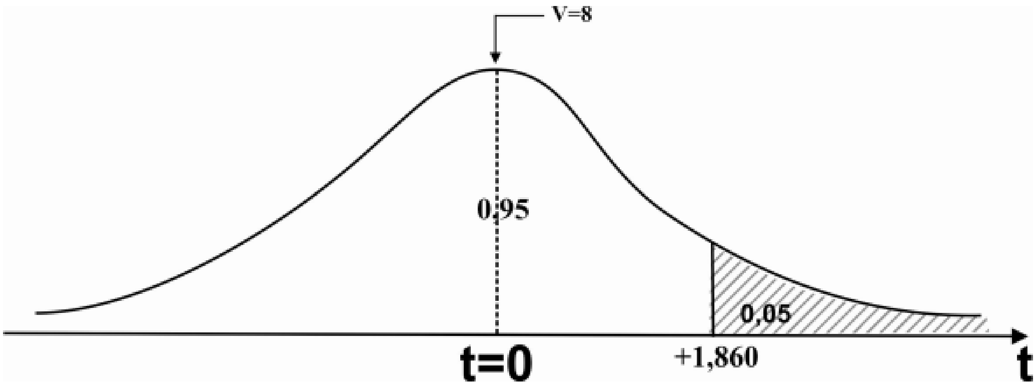
DISTRIBUIÇÃO "t" DE "STUDENT"

1) Qual é o valor Crítico ou Tabelado sob a curva da distribuição teórica de probabilidade t de "Student" com $v = 8$ graus de liberdade que deixa uma área à direita dele positivo de 5%? (valor unilateral à direita ou positivo). Ou de outra forma,

$$P(t_{CALCULADO} \geq t_{TABELADO}) = 0{,}05 = 5\%,$$

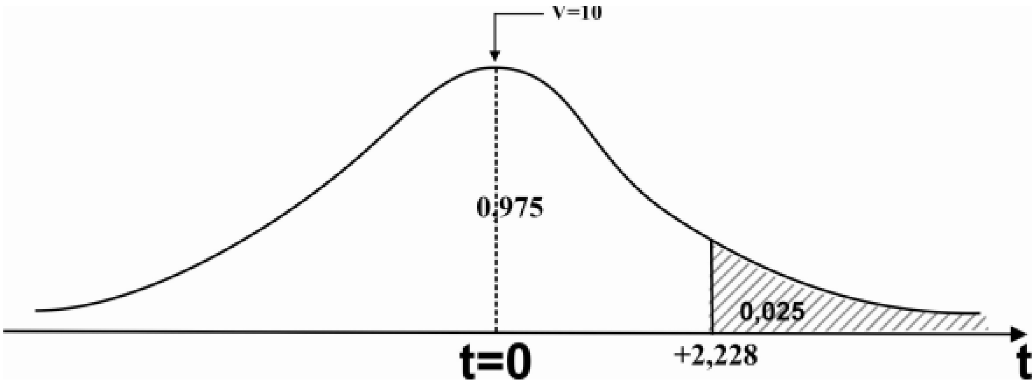
$$P(t_{CALCULADO} \geq t_{[8;0,05]}) = P(t_{CALCULADO} \geq +1{,}860) = \int_{1,860}^{\infty} f(t)dt = 0{,}05 = 5\%$$

$$+t_{[8;0,05]} = +1{,}860$$



2) Qual é o valor Crítico ou Tabelado sob a curva da distribuição teórica de probabilidade t de "Student" com $v = 10$ graus de liberdade que deixa uma área à direita dele positivo de dois e meio por cento, isto é, 2,5%? (valor unilateral à direita ou positivo).

$$+t_{[10;0,025]} = +2{,}228$$

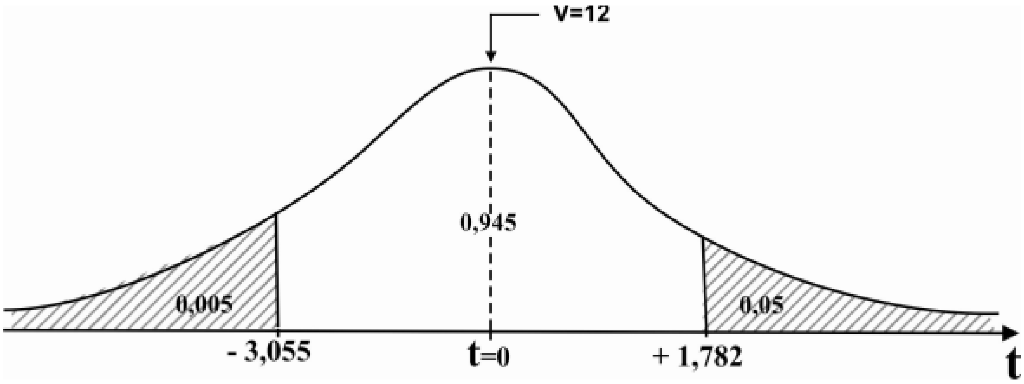


3) Qual é a área ou probabilidade sob a curva da distribuição teórica de probabilidade t de "Student" com $v = 12$ graus de liberdade entre os valores críticos ou tabelados $-3{,}055$ e $+1{,}782$, 94,5%. De outra forma, podemos perguntar o seguinte: quais são os valores críticos ou tabelados sob a curva da distribuição teórica de probabilidade t de "Student" com $v = 12$ graus de liberdade que deixam uma área de 0,005 à esquerda dele negativo e de 0,05 à direita dele positivo.

$$P\left[-t_{[12;0,005]} \leq t \leq +t_{[12;0,05]}\right] = 0{,}945 = 94{,}5\%$$

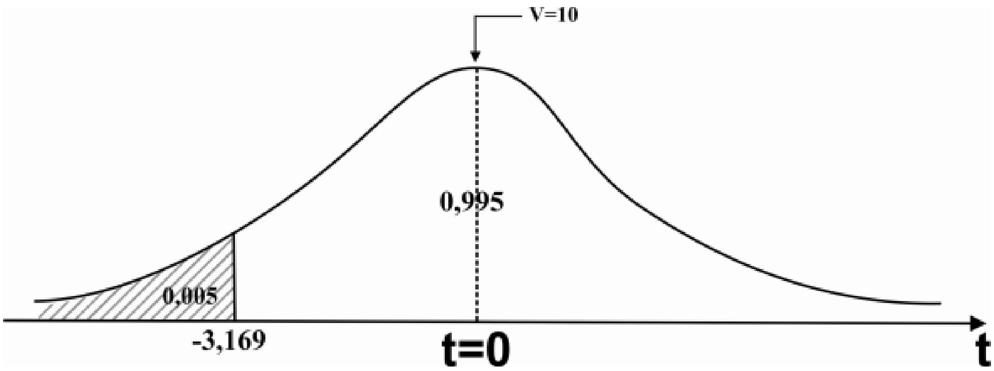
$$P[-3{,}055 \leq t \leq +1{,}782] = P[(t \leq +1{,}782) - P(t \leq -3{,}055)] = 0{,}95 - 0{,}005 = 0{,}945$$

$$P[-3{,}055 \leq t \leq +1{,}782] = 0{,}950 - 0{,}005 = 0{,}945 = 94{,}5\%$$



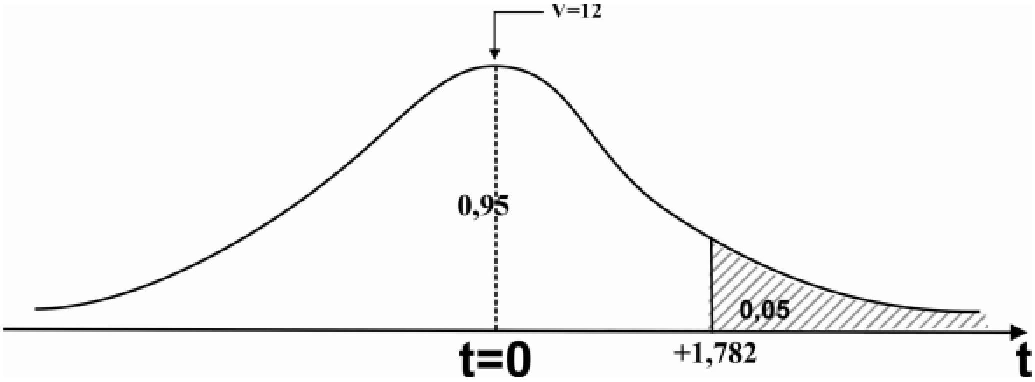
4) Qual é o valor Crítico ou Tabelado sob a curva da distribuição teórica de probabilidade t de "Student" com $v = 10$ graus de liberdade que deixa uma área à esquerda dele negativo de meio por cento (0,5%)? (valor unilateral à esquerda ou negativo).

$$-t_{[10;0,005]} = -3{,}169$$



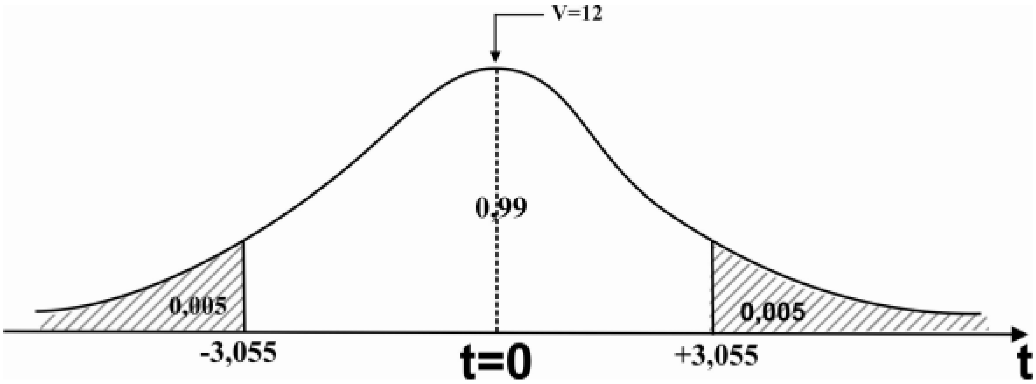
5) Qual é o valor Crítico ou Tabelado sob a curva da distribuição teórica de probabilidade t de "Student" com $v = 12$ graus de liberdade que deixa uma área à direita dele positivo de 0,05 ou 5%? (valor unilateral à direita ou positivo).

$$+\,t_{[12;0,05]} = +1{,}782$$



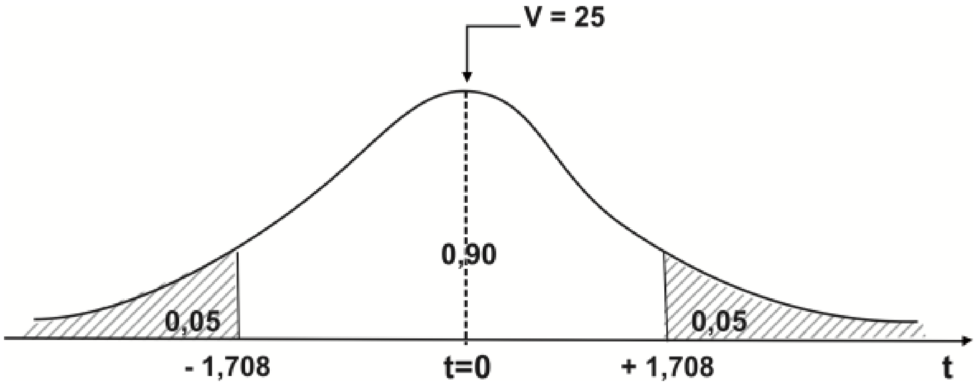
6) Qual é o valor Crítico ou Tabelado sob a curva da distribuição teórica de probabilidade t de "Student" com $v = 12$ graus de liberdade que deixa uma área à esquerda dele negativo e à direita dele positivo de 0,005 ou meio por cento (0,5%)? (valor bilateral).

$$t_{\left[12;\frac{0,01}{2}\right]} = \pm 3{,}055$$



7) Qual é o valor Crítico ou Tabelado sob a curva da distribuição teórica de probabilidade t de "Student" com $v = 25$ graus de liberdade que deixa uma área à esquerda dele negativo e à direita dele positivo de 0,05 ou cinco por cento (5%)? (valor bilateral).

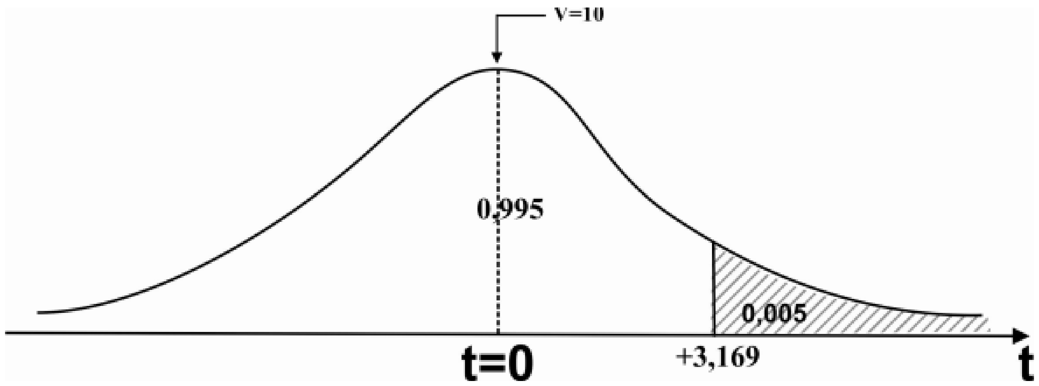
$$t_{\left[25;\frac{0,10}{2}\right]} = \pm 1{,}708$$



8) Qual é o valor Crítico ou Tabelado sob a curva da distribuição teórica de probabilidade t de "Student" com $v = 10$ graus de liberdade que deixa uma área à direita dele positivo de 0,005 ou meio por cento (0,5%)? (valor unilateral à direita ou positivo). É o mesmo valor que deixa uma área à esquerda dele negativo de 0,005 ou meio por cento (0,5%), ou então que deixa uma área de 99,5 % à direita dele negativo, ou seja,

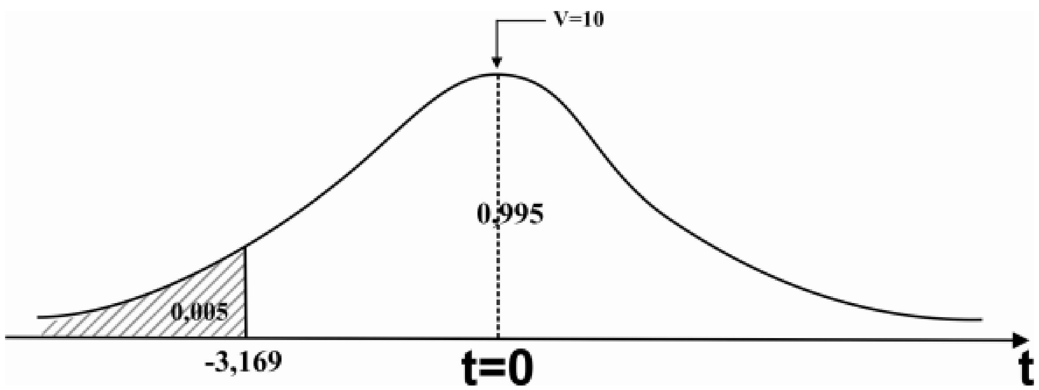
$$+\boldsymbol{t}_{[V;\alpha]} = -\boldsymbol{t}_{[V;1-\alpha]}$$

$$+\boldsymbol{t}_{[10;0,005]} = -\boldsymbol{t}_{[10;0,995]} = \mathbf{3{,}169}$$



9)

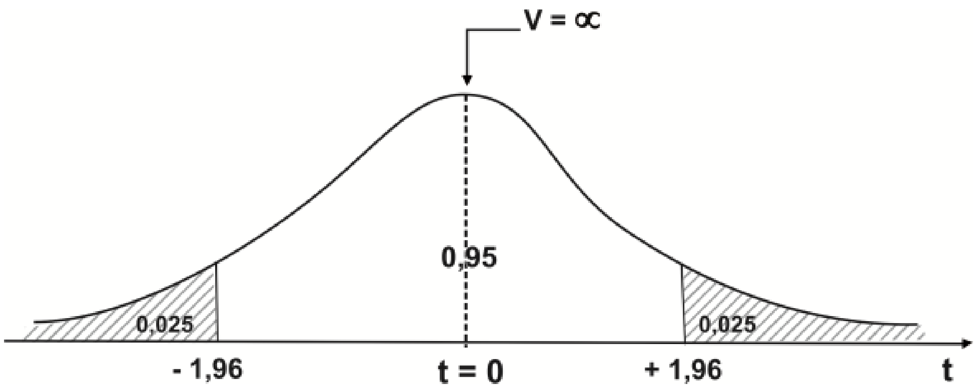
$$-\boldsymbol{t}_{[10;0,005]} = \mathbf{-3{,}169}$$



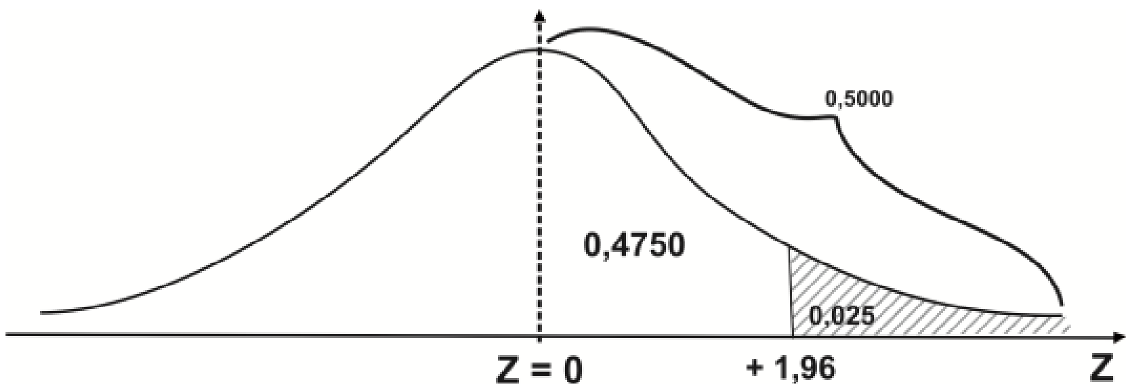
10) Qual é o valor Crítico ou Tabelado sob a curva da distribuição teórica de probabilidade t de "Student" com $v = \infty$ (valor infinito) graus de liberdade que deixa uma área à direita dele positivo de 0,025, ou dois e meio por cento (2,5%), e também, à esquerda dele negativo de 0,025, ou dois e meio por cento (2,5%)? (valor bilaterial).

O qual equivale a um Valor Crítico ou Tabelado sob a Curva da Distribuição Normal Padrão que deixa uma área de 0,025, ou dois e meio por cento (2,5%) à direita deste Valor Tabelado de Z. Ou seja,

$$t_{\left[v=\infty;\frac{0,05}{2}\right]} = Z_{\left[\frac{0,05}{2}\right]} = \pm 1,96$$



O qual equivale a um valor crítico sob a curva normal de Z que deixa uma área de 2,5 % à direita dele positivo ($+Z_{[0,025]}$), ou à esquerda dele negativo ($-Z_{[0,025]}$),.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAMOWITZ, M.; I. A. STEGUN, **Pocketbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables**, Verlag Harri, Frankfurt, 468 p., Natl. Inst. of Stand. and Technol., Gaithersburg, Md., 1984.

ASSIS, F.N. DE ARRUDA, H. V., PEREIRA, A. R. **Aplicações de estatística a climatologia: Teoria e prática**, Pelotas: Ed. Universitária/ UFPel, 1996. 161 p.

BATSCHELET, E. **Introdução à matemática para biocientistas.** São Paulo: EDUSP, 1978. 596 p.

BOTELHO, V.A.; MORAIS, A.R. de. Estimativas dos parâmetros da distribuição gama aos dados pluviométricos do município de Lavras, Estado de Minas Gerais. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 23, n. 3, p. 697-706 julho/setembro de 1999.

BRESSAN, G. Modelagem e simulação de sistemas computacionais. São Paulo; Larc–PCS/EPUSP, IME/USP, 2002. 12p.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. **Estatística Básica**. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2002.

CASELLA, G.; BERGER, R. L.Statistical Inference (2nd edition) Wadsworth Pub Co.2001. 660 P.

CATALUNHA, M.J. et al. Aplicação de cinco funções densidade de probabilidade a séries de precipitação pluvial no estado de Minas Gerais. **Revista Brasileira de Agrometeorologia**, v. 10, n.1, p.153-162; Santa Maria, 2002.

CHOW, V. T. **Handbook of Applied Hydrology**. New York, McGraw-Hill, 1964. Não paginado.

CHOW, V. T. Maidment, D. R.; Mays, L. W. **Appied hydrology**. New York:Mcgraw-Hill, 1988.572 p.

CLARK, A. B.; DISNEY, R. L. **Probabilidade e processos estocásticos.** Livros Técnicos e Científicos Editora S. A. Rio de janeiro. 1979. 352 p.

COUTO, H.T.Z. **Distribuições de diâmetro em plantações de *Pinus caribaea morelet***, Piracicaba: Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz/USP, 79 P. Tese (Livre Docência), ESALQ, 1980.

CRAMER,H. **Mathematical methods of statistics**, Princeton University Press, New Jersey 1966.

DAGNELLI, P. **Estatística: Teoria e Métodos.**Publicações Europa-America, Portugal. Vol. 1. 1975.440 p.

DAGNELLI, P. **Estatística: Teoria e Métodos.**Publicações Europa-America, Portugal. Vol. 2. 1975. 534 p.

DAGNELLI, P. **Estatística: teoria e métodos.**Publicações Europa-América, Portugal. Vol. 1 e 2. 1985. 536 p.

DANTAS, CARLOS A. B. **Probabilidade- um curso introdutório.** Coleção: Acadêmica Editora: EDUSP. 2ª Edição - 2004 – 256 p.

DEVORE, J. L.Probability and Statistics for Engineering and the Sciences With Infotrac.Hardcover:Thomson learning.2003, 764 p.

DHARMADHIKARI, S. Bounds on quantiles: A comment on O`Cinneide. **The American Statistician**, Alexandria, v. 45, n. 3, p. 257-258, Aug. 1991.

FELLER, W. **An Introduction to probability theory and its application** 3 ed. New york, John Wiley & Sons, 1967, vol. 1.236 p.

FERNANDEZ, P., **Introdução à Teoria das Probabilidades**. Rio de Janeiro, LTC, Coleção Elementos da Matemática, 1975.

FERREIRA, D. F;**Estatística Básica,** Lavras:Editora UFLA, 1ª Edição, 2005.664 p.

FISZ,M., **Probability Theory and Mathematical Statistics,** Jonh Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.

FONSECA, J., **Introdução à Estatística Matemática – Aplicações**, Edição SPB, 1994.

GAMA, S.M. A.; PEDROSA, A. C.. **Introdução computacional a probabilidade e estatística** Coleção: Universitária: Porto Editora.Portugal**,** 1ª edição. 2004.590 p.

GRAÇA, M. E., **Introdução às Probabilidades e Estatística**, DEIO, FCUL, Sociedade Portuguesa de Estatística,1998.

GUIMARÃES, R.C.; SARSFIELD C. J.A., **Estatística**, McGraw-Hill, 1997.

HANN, C. T. **Statistical methods in hydrology**, Ames: Iowa State University Press, 1977. 378 p.

HASTINGS, N.A.J.; PEACOCK, J.B. **Statistical distributions**: A handbook for students and practitioners, Longon Butterworths, England, 1975. 129p.

HAYTER, A. J. Probability and Statistics for Engineers and Scientists (2nd edition.) Duxbury P.2002 916 P.

HAZAN, S. **Fundamentos da Matemática Elementar: combinatória e probabilidade**. 6. ed. São Paulo: Atual Editora, 1993.

HOEL P. G. **Introduction to mathematical statisitcs.** Wiley, New York, 1965, 427 p.

HOEL, P. G. ; PORT, S. C. ; STONE, C. J. **Introdução á teoria da probabilidade**. Rio de janeiro, Interciência, 1978.269 p.

HOEL, P.G. **Estatística matemática,** 4 ed. Rio de Janeiro:Editora Guanabara, 1980.373 p.

JAMES, B. R., **Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário**. Rio de Janeiro, IMPA, Projeto Euclides, 1981.

JOHNSON, N. L., KOTZ, S. **Continous univariate distributions**. Boston: Houghton Millin, 1970, v.2 p.112.

JOHNSON, N. L., KOTZ, S. **Distribution in statistics, continue univariate distribution**, New York: Hougton Mifflin, v. 2, 1970. 328 p.

KVANLI, A. H. **Statistics**: A Computer Integrated Approach Publisher: West Publishing Company. 1988.935 P.

LANNA, A. E. **Elementos de estatística e probabilidade**. In: TUCCI, C. E. M. Hidrologia. Porto Alegre: EDUSO; ABRH, 1993. P. 79-164.

LIPSCHUTZ, S. **Probabilidade**. São Paulo: Mc Graw-Hill, 1974. 228p.

LOÉVE, M;. **Probability Theory**. 3 ed.. New York, D. Van Nostrand, 1963.

MAGALHÃES, M. N. ; LIMA, ª C. P. **Noções de Probabilidade e Estatística.** São Paulo, EDUSP, 2002, 398 p.

MARTINS, M. J. **Simulação** (1ª Parte).Lisboa: Instituto Superior de Agronomia, 2003. 60 p. (notas de Aula).

MELLO, F.,G. **Probabilidades e Estatística,** Volumes 1 e 2, Escolar Editora, 1993.

MELLO,F. , **Introdução aos Métodos Estatísticos**, vol. I e II, Cadernos do Instituto de Orientação profissional, Lisboa, 1973.

MEYER, P. L. **Probabilidade**: **Aplicações à Estatística**. 1ª ed. Rio de Janeiro; Livro Técnico, 1969, 391 p.

MEYER, P. L. **Probabilidade**: **Aplicações à Estatística**. Livros Técnicos Científicos Editora S.A. 1ª ed. Rio de Janeiro; Livro Técnico, 1978, 405 p.

MONTGOMERY, D. C. e RUNGER, George C.. **Applied Statistics and Probability for Engineers**, 3ª Edição.John Wiley & Sons, New York. 2003.

MONTGOMERY, D. C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros** Editora**:** *LTC.* 2ª Edição – 2003. 478p

MOOD, A. M.;GRAYBILL, F. A. **Introdution to the theory of statistics.** Mc Graw Hill, New York, 1963, 443 p.

MOOD, A. M., GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. **Introduction to the Theory of Statistics**. McGraw-Hill.1974.

MORETTIN, P. A; BUSSAB, W. O. **Estatística básica**. 5ª edição., São Paulo, Saraiva, 2003, 526 p.

MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 6. edição. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

MURRAY R. SPIEGEL; JOHN SCHILLER; E. R. ALU SRUNIVASAN. **Probabilidade e Estatística**. Porto Alegre: 2. edição. Bookman, 2004. 398p.

MURTEIRA, B. J., RIBEIRO, C. S., ANDRADE E SILVA, J. e PIMENTA, C.. **Introdução à Estatística**.. McGraw Hill, Lisboa. 2002.

MURTEIRA, B., **Probabilidades e Estatística**, Volumes 1 e 2, McGraw-Hill, 1997.

NAGHETTINI, M.; PINTO, E. J. A. **Hidrologia estatística.** Serviço geológico do Brasil – CPRM. Belo Horizonte, MG. 2007. 552 p.

O`CINNEIDE, C. A. The mean is within one standard deviation of any median. **The American statistician**, Alexandria. V. 44, n. 4 p. 292-293, nov.. 1990.

OLIVEIRA, P. L. ; COSTA NETO; CYMBALISTA, M. **Probablidades: resumos teóricaos, exercícios resolvidos; exercícios propostos**. Editora Edgard Blucher ltda. São Paulo. 1988.145 p.

PACITTI, T. **Fortran**. Rio de janeiro: Livro Técnico e Científico, 1974. 377 p.

PAPOULIS, A.Probability Random Variables, and Stochastic Processes. McGraw-Hill College.2001.576 P.

PARZEN, E. **Modern probality Theory**, Van Nostrand, New York, 1955.

PAULINO E BRANCO **Exercícios de Probabilidade e Estatística**. Escolar Editora.2005.

PAULINO, C. D.; Branco, J. **Exercícios de Probabilidade e Estatística**.Escolar Editora, Lisboa..2004.

PEDROSA, A. C. ; GAMA, S. M. A.**Introdução Computacional à Probabilidade e Estatística**.Porto Editora.Porto-Portugal.2004, 607 p.

PIMENTEL-GOMES, F. **Iniciação à Estatística**. 5ª ed. São Paulo: Livraria Nobel S.A., 1976. 236p.

ROBALO, A., **Estatística- Exercícios,** Volumes 1 e 2, Edições Sílabo, 1995.

ROHATGI **An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics**. John Wiley.1976.

ROSS, S. M..**Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists***,* 3ª Edição.Elsevier/Academic Press, Burlington, MA.2004.

ROSS, S. M. **A First course in probability**. 4 ed. London/ New York, mac-millan, 1994.

ROSS, S. M. First Course in Probability.Prentice Hall. 2005.576 p.

SÀNCHEZ, J. A. P. Um dia inesquecível na vida de Gauss.**Revista do professor de matemática.** São Paulo: SBM, Nº 37: 11 – 13, 1998.

SCOLFORO, J. R. S. **Modelos para expressar o crescimento e a produção florestal: Parte 1. Lavras**, ESAL/FAEPE. 188p. 1994.

SOONG, T. T. **Modelos Probabilísticos em Engenharia e Ciências**; Tradução Alfredo Alves de Farias. Rio de Janeiro: LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora S. A.., 1986

SPIEGEL, M., **Probabilidade e Estatística**, Colecção Schaum, McGraw-Hill, 1978.

THOM, H. C. S. **A note on the gamma distribution. Monthly Weather Review**, Washington, v. 86, p. 117-122. 1958.

THOM, H. C. S. **Some methods of climatological analysis**. Roma, FAO, 1966. 50p. (FAO, Technical Notes. 81).

TIAGO DE OLIVEIRA. **Probabilidades e Conceitos, Métodos e Aplicações estatísticas.** vol. I, II. McGraw-Hill. 1990.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL: Departamento de Matemática e Estatística:em http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2.html.Acesso em 25 de março de 2007.

WILKS S. S. **Mathematical statistics.** Wiley, New York, 1962, 644 p.

APÊNDICE 1

ALFABETO GREGO

NOME DA LETRA	SÍMBOLOS	
	MAIÚSCULAS	MINÚSCULAS
Alfa	Α	α
Beta	Β	β
Gama	Γ	γ
Delta	Δ	δ
Épsilon	Ε	ε
Zeta	Ζ	ζ
Eta	Η	η
Téta	Θ	θ
Iota	Ι	ι
Capa	Κ	κ
Lambda	Λ	λ
Um(mi)	Μ	μ
Nu(ni)	Ν	ν
Csi	Ξ	ξ
Omicron	Ο	ο
Pi	Π	π
Ró	Ρ	ρ
Sigma	Σ	σ
Tau	Τ	τ
Úpsilon(ipsilon)	Υ	υ
Fi	Φ	φ
Chi(qui)	Χ	χ
Psi	Ψ	ψ
Omega	Ω	ω

APÊNDICE 2

VALORES $e^{-\lambda}$

λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$
0,00	1,0000000	2,55	0,0780818	5,10	0,0060968	7,65	0,0004760	10,20	0,0000372
0,05	0,9512295	2,60	0,0742737	5,15	0,0057994	7,70	0,0004528	10,25	0,0000354
0,10	0,9048375	2,65	0,0706513	5,20	0,0055166	7,75	0,0004307	10,30	0,0000336
0,15	0,8607081	2,70	0,0672056	5,25	0,0052475	7,80	0,0004097	10,35	0,0000320
0,20	0,8187309	2,75	0,0639280	5,30	0,0049916	7,85	0,0003898	10,40	0,0000304
0,25	0,7788009	2,80	0,0608102	5,35	0,0047482	7,90	0,0003707	10,45	0,0000289
0,30	0,7408184	2,85	0,0578444	5,40	0,0045166	7,95	0,0003527	10,50	0,0000275
0,35	0,7046883	2,90	0,0550233	5,45	0,0042963	8,00	0,0003355	10,55	0,0000262
0,40	0,6703202	2,95	0,0523398	5,50	0,0040868	8,05	0,0003191	10,60	0,0000249
0,45	0,6376283	3,00	0,0497872	5,55	0,0038875	8,10	0,0003035	10,65	0,0000237
0,50	0,6065309	3,05	0,0473590	5,60	0,0036979	8,15	0,0002887	10,70	0,0000225
0,55	0,5769500	3,10	0,0450493	5,65	0,0035175	8,20	0,0002747	10,75	0,0000214
0,60	0,5488119	3,15	0,0428522	5,70	0,0033460	8,25	0,0002613	10,80	0,0000204
0,65	0,5220460	3,20	0,0407623	5,75	0,0031828	8,30	0,0002485	10,85	0,0000194
0,70	0,4965855	3,25	0,0387743	5,80	0,0030276	8,35	0,0002364	10,90	0,0000185
0,75	0,4723668	3,30	0,0368832	5,85	0,0028799	8,40	0,0002249	10,95	0,0000176
0,80	0,4493292	3,35	0,0350844	5,90	0,0027395	8,45	0,0002139	11,00	0,0000167
0,85	0,4274152	3,40	0,0333733	5,95	0,0026059	8,50	0,0002035	11,05	0,0000159
0,90	0,4065699	3,45	0,0317457	6,00	0,0024788	8,55	0,0001935	12,00	0,0000061
0,95	0,3867413	3,50	0,0301975	6,05	0,0023579	8,60	0,0001841	12,05	0,0000058
1,00	0,3678797	3,55	0,0287247	6,10	0,0022429	8,65	0,0001751	13,00	0,0000023
1,05	0,3499380	3,60	0,0273238	6,15	0,0021335	8,70	0,0001666	13,05	0,0000022
1,10	0,3328713	3,65	0,0259912	6,20	0,0020294	8,75	0,0001585	14,00	0,0000008
1,15	0,3166370	3,70	0,0247236	6,25	0,0019305	8,80	0,0001507	14,05	0,0000008
1,20	0,3011945	3,75	0,0235178	6,30	0,0018363	8,85	0,0001434	15,00	0,0000003
1,25	0,2865050	3,80	0,0223708	6,35	0,0017468	8,90	0,0001364	15,05	0,0000003
1,30	0,2725320	3,85	0,0212798	6,40	0,0016616	8,95	0,0001297	16,00	0,0000001

λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$
1,35	0,2592405	3,90	0,0202420	6,45	0,0015805	9,00	0,0001234	16,05	0,0000001
1,40	0,2465972	3,95	0,0192548	6,50	0,0015034	9,05	0,0001174	17,00	0,0000000
1,45	0,2345705	4,00	0,0183157	6,55	0,0014301	9,10	0,0001117	17,05	0,0000000
1,50	0,2231304	4,05	0,0174224	6,60	0,0013604	9,15	0,0001062	18,00	0,0000000
1,55	0,2122482	4,10	0,0165727	6,65	0,0012940	9,20	0,0001010	18,05	0,0000000
1,60	0,2018967	4,15	0,0157645	6,70	0,0012309	9,25	0,0000961	19,00	0,0000000
1,65	0,1920501	4,20	0,0149956	6,75	0,0011709	9,30	0,0000914	19,05	0,0000000
1,70	0,1826837	4,25	0,0142643	6,80	0,0011138	9,35	0,0000870	20,00	0,0000000
1,75	0,1737741	4,30	0,0135686	6,85	0,0010595	9,40	0,0000827	20,05	0,0000000
1,80	0,1652991	4,35	0,0129069	6,90	0,0010078	9,45	0,0000787	21,05	0,0000000
1,85	0,1572374	4,40	0,0122774	6,95	0,0009586	9,50	0,0000749	22,00	0,0000000
1,90	0,1495688	4,45	0,0116786	7,00	0,0009119	9,55	0,0000712	22,05	0,0000000
1,95	0,1422743	4,50	0,0111090	7,05	0,0008674	9,60	0,0000677	23,00	0,0000000
2,00	0,1353355	4,55	0,0105672	7,10	0,0008251	9,65	0,0000644	23,05	0,0000000
2,05	0,1287351	4,60	0,0100519	7,15	0,0007849	9,70	0,0000613	24,00	0,0000000
2,10	0,1224566	4,65	0,0095616	7,20	0,0007466	9,75	0,0000583	24,05	0,0000000
2,15	0,1164843	4,70	0,0090953	7,25	0,0007102	9,80	0,0000555	25,00	0,0000000
2,20	0,1108033	4,75	0,0086517	7,30	0,0006755	9,85	0,0000527	25,05	0,0000000
2,25	0,1053994	4,80	0,0082298	7,35	0,0006426	9,90	0,0000502	26,00	0,0000000
2,30	0,1002590	4,85	0,0078284	7,40	0,0006113	9,95	0,0000477	26,05	0,0000000
2,35	0,0953693	4,90	0,0074466	7,45	0,0005814	10,00	0,0000454	27,00	0,0000000
2,40	0,0907181	4,95	0,0070834	7,50	0,0005531	10,05	0,0000432	27,05	0,0000000
2,45	0,0862937	5,00	0,0067380	7,55	0,0005261	10,10	0,0000411	28,00	0,0000000
2,50	0,0820851	5,05	0,0064094	7,60	0,0005005	10,15	0,0000391	28,05	0,0000000

APÊNDICE 3

Aspectos gerias da distribuição teórica (especial) de probabilidade binomial.

Combinação de "n" elementos tomados "k" a "k"

Chamaremos cada seleção de n elementos tomados k a k desprezando a ordem como o número total de combinações por C_K^n ou seja, $C_K^n = \frac{n(n-1)\cdots(n-k-1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, esta extensa fórmula é normalmente abreviada pelo símbolo $\binom{n}{k}$. Não existe nenhuma forma padrão para a leitura deste símbolo. Uma maneira apropriada seria "n acima de k", mas utiliza-se em geral a seguinte: combinação de nk a k. O símbolo deveria ser cuidadosamente diferenciado de "n sobre k", que significa a fração $\frac{n}{k}$.Vejamos um exemplo de combinação: De quantas maneiras três (3) dentre cinco (5) animais suínos da Raça Duroc podem ser selecionados? A equação $C_K^n = \frac{n(n-1)\cdots(n-k-1)}{k!}$ dá a resposta. $C_3^5 = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$.

Se representarmos os cinco animais, arbitrariamente, por a, b, c, d, e, as dez combinações serão:

abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde

Observemos que dce ou edc não ocorrem nesta listagem já que eles são somente arranjos de cde.

Da mesma forma, obtemos.

$$C_1^5 = \binom{5}{1} = \frac{5!}{1!\,(5-1)!} = \frac{5!}{1!!} = 5$$

$$C_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5.4}{1.2} = 10$$

$$C_4^5 = \binom{5}{4} = \frac{5!}{4!\,(5-4)!} = \frac{5.4.3.2}{1.2.3.2} = 5$$

Observemos que $\binom{5}{5} = 1$, já que podemos selecionar 5 objetos somente de uma maneira. Podemos observar também que $\binom{5}{1} = \binom{5}{4}, \binom{5}{2} = \binom{5}{3}$.

Esta propriedade tem um significado particular. Se selecionarmos um objeto dentre cinco, os quatro objetos restantes formam também uma seleção. A cada seleção de um objeto corresponde exatamente uma seleção de quatro e vice e versa. Portanto, seus números devem ser iguais. O mesmo é verdadeiro para seleções de dois e três objetos dentre cinco. Em geral, temos que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Observemos que em $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, o símbolo $\binom{n}{n}$ não ter par. Formalmente, ele seria $\binom{n}{0}$. Entretanto, não existe nada como uma combinação de zero objeto dentre n.

Introduzimos $\binom{n}{0}$ somente para a segurança da simetria. Para satisfazer $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, definimos $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Aqui, n é qualquer inteiro positivo. Mas, vamos um pouco além e permitimos que n seja zero. Então definimos $\binom{0}{0} = 1$.

Os números $\binom{n}{k}$ são frequentemente dispostos de tal forma que eles formam um triângulo de Pascal [Blaise Pascal (1623-1662), matemático, físico e filósofo francês].

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\
\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \\
\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\mathbf{1} \\
\mathbf{1 \quad 1} \\
\mathbf{1 \quad 2 \quad 1} \\
\mathbf{1 \quad 3 \quad 3 \quad 1} \\
\mathbf{1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1} \\
\mathbf{1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

Existe uma forma fácil de calcularmos os números do triângulo de Pascal. Observamos que cada número é a soma dos dois números mais próximos na linha imediatamente superior. Então, 5 = 1 + 4, 10 = 4 + 6 etc. A próxima linha não representada aqui, conteria, portanto, os números 1 = 5 =6, 5 + 10 =15, 10 + 10 =20 etc.

Uma aplicação importante do coeficiente $\binom{n}{k}$ é feita na álgebra. Consideramos potências de um binômio com inteiros positivos como expoentes dados por:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4, \quad \text{etc.}$$

Os coeficientes formam as linhas do triângulo de Pascal. Em geral, pode-se escrever o seguinte:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n,$$

Uma forma de demonstrar esta fórmula utiliza combinação, e para explicar a idéia, vamos mostrar o caso especial em que $n = 4$. Consideramos o produto.

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)(a_4 + b_4).$$

Quando fazemos as multiplicações, obtemos uma soma de muitos termos. Cada um dos termos contém exatamente quatro fatores, tais como $(a_1 b_2 b_3 b_4)$ ou $(a_3 a_4 b_1 b_2)$. Todas as combinações dos a e b aparecem. Existem $c_3^4 = \binom{4}{3}$ com três b, $c_2^4 = \binom{4}{2}$ com dois b, etc. Quando finalmente igualamos $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a$ e $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b$, o termo ab^3 aparece $\binom{4}{3}$ vezes, o termo a^2b^2 aparece $\binom{4}{2}$ vezes etc. Isto explica a fórmula para $(a + b)^4$. O mesmo argumento pode ser usado para qualquer outro expoente inteiro n $(n > 0)$.

A fórmula $(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} b^n$, é chamada o Teorema do Binômio. Os coeficientes $\binom{n}{k}$ são conhecidos como coeficientes binomiais. Quando transformamos $(a + b)^n$ em uma soma de termos $\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, também dizemos que expandimos $(a + b)^n$.

A probabilidade de se verificarem ao longo das n experiências, x realizações de um evento Sucesso A e $n - x$ realizações de um evento fracasso B, numa ordem dada, é $p^x q^{n-x}$, mas, na realidade, é possível verificar x realizações de A ao longo de n experiências em C_x^n ordens diferentes, pois as diferentes ordens possíveis excluem-se mutuamente.

Daí resulta que a probabilidade de se verificarem x realizações de A e $n - x$ realizações de B, numa ordem qualquer, é, para $x = 0,1,2,3,4,\ldots,n$;

$$P(X = x) = P_x = C_x^n P^x q^{n-x}$$

Essa lei chama-se lei binomial de probabilidade e a variável x é uma variável aleatória discreta que possui uma distribuição binomial, ou, mais simplesmente, uma variável binomial. A expressão $C_x^n P^x q^{n-x}$, é, com efeito, o termo geral do desenvolvimento do binômio $(p + q)^n$, também conhecido como binômio de Newton ou binômio de Tartáglia.

Uma vez que $p + q = 1$, deduzimos imediatamente que a relação $\sum_{x=0}^{\infty} P_x = \sum_{x=0}^{n} P_x = 1$ se verifica facilmente.

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL: X ~ Bin (n; p)

$$P(X = x_i) = C_x^n P^x q^{n-x} = \frac{n!}{X!\,(n-x)!} P^x q^{n-x} \text{, onde}$$

$x = \{0,1,2,\ldots,n\}$ e $C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!}$, sendo $p + q = 1$, $q = 1 - p$,

$$(p + q)^n = \sum_{x=0}^{n} \frac{n}{X!(n-x)!} P^x q^{n-x} = 1{,}0$$

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + \ldots + P(X = n) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$$

$$P(x \geq 1) = 1 - [P(x = 0)]$$

$$P(x \leq 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)$$

Forma generalizada da distribuição Binomial.

X = Número de Sucessos	$P(X = x_i)$
0	$\frac{n!}{0!(n)!} P^0 q^n$
1	$\frac{n!}{1!(n-1)!} P^1 q^{n-1}$
2	$\frac{n!}{2!(n-2)!} P^2 q^{n-2}$
3	$\frac{n!}{3!(n-x)!} P^3 q^{n-3}$
⋮	⋮
x	$\frac{n!}{x!(n-x)!} P^x q^{n-x}$
⋮	⋮
n	$\frac{n!}{n!(0)!} P^n q^0$
Total = $\sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{X!(n-x)!} P^x q^{n-x} = 1$	

ÍNDICE REMISSIVO

SOBRE OS AUTORES

Janilson Pinheiro de Assis, Natural de João Câmara, RN

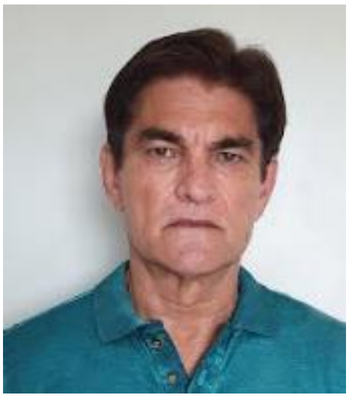
Engenheiro Agrônomo graduado em Engenharia Agronômica (1987) na ESCOLA SUPERIOR DE AGRICULTURA DE MOSSORÓ - ESAM. Concluiu o Curso de Pós-graduação-Mestrado (1990) em Engenharia Agronômica (Fitotecnia-Estatística experimental) na Universidade Federal do Ceará (UFC). Realizou o curso de Pós-graduação Doutorado (2014) em Produção Vegetal - Fitotecnia na Universidade de São Paulo (USP), com pesquisa direcionada para a área de estatística e modelagem aplicada à agricultura. Orientou e orienta estudantes bolsistas de monitoria, de residência acadêmica e iniciação científica. Atualmente, é Professor Titular da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA), Foi Professor da Escola Superior de Agricultura de Mossoró (ESAM) onde leciona a disciplina de Estatística há 33 anos, possui seis livros publicados, 11 apostilas e mais de 25 artigos completos publicados/aceitos em revistas nacionais e internacionais além de 20 resumos simples/expandido. É revisor de dez revistas nacionais e internacionais. Contato: (85) 99826636.

Isaac Reinaldo Pinheiro de Lima

Natural de Natal, RN, É estudante de graduação do curso de Bacharelado em Tecnologia da Informação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte-UFRN (2019- 2023). Ingressou através do Processo de Seleção ENEM-Exame Nacional de Ensino Médio e do programa de seleção Unificado-SISU do Ministério da Educação. Já foi selecionado para ingresso (onde cursou parcialmente) curso de Graduação de Sistemas de Informação na Universidade de São Paulo-USP, EACH. Atualmente, é Bolsista do programa PSH – Painel de Segurança Hídrica na Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Além de Estagiário de tecnologia na Empresa VTEX, possui um livro publicado. Já Concluiu cursos de Robótica e programação Computacional, possui um artigo científico publicado em revista internacional com Qualis da Capes B1. Contato: (84) 98810 9278.

Joelma de Assis França, Natural de João Câmara, RN

Professora do ensino fundamental do estado do Rio Grande do Norte, e Da Prefeitura da Cidade de João Câmara , RN, Com atuação durante mais de vinte anos, É Graduada em Licenciatura em Ciências Biológicas Pela Universidade federal do Rio Grande do Norte-UFRN, EM Natal, RN, Atualmente é Mestranda do Programa de Pós Graduação CIÊNCIA DA EDUCAÇÃO na Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) em Natal , RN, com Longa experiência na área de Docência, E Administrativa como Diretora de Escola, Possui um Livro Publicado Durante o Ano de 2023 Sobre Transformação de Dados Estatísticos. Contato: (84) 988539347.



Roberto Pequeno de Sousa

Engenheiro Agrícola, graduado em Engenharia Agrícola (1981) na Universidade Federal da Paraíba (UFPB). Mestre (1985) em Engenharia Civil (Recursos Hídricos - Irrigação) na Universidade Federal da Paraíba (UFPB). Doutor (2013) em Agronomia - Fitotecnia na Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA). Atualmente, é Professor Titular da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA), leciona a disciplina de Estatística Experimental, possui sete livros publicados, 62 artigos completos publicados/aceitos em revistas nacionais e internacionais, 42 resumos simples/expandido. É revisor de cinco revistas nacionais e internacionais. Contato: (84)99411-5032.

Robson Pequeno de Sousa

Doutor em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal da Paraíba (2000), mestrado em Engenharia Elétrica pela universidade Federal de Pernambuco (1991) e graduação em Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba (1985). Professor Doutor Associado D do Departamento de Computação da Universidade Estadual da Paraíba e membro efetivo do Programa de Pós-Graduação em Ciência e Tecnologia em Saúde – PPGCTS-UEPB. Coordena o Laboratório de Análises de Imagens e Sinais –LAIS do Núcleo de Tecnologias Estratégicas em Saúde – NUTES. Contatos: Fone: 083993129256.

Telde Natel Custódio

Natural de Lavras/MG. Possui graduação em Engenharia Agrícola pela Escola Superior de Agricultura de Lavras, atual Universidade Federal de Lavras (1988), mestrado em Agronomia com área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária pela Universidade Federal de Lavras (1999), doutorado em Agronomia com área de concentração em Estatística e Experimentação Agronômica pela Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" da Universidade de São Paulo (2004). Atualmente é professor na área de Estatística pela Universidade Federal de São João Del-Rei (UFSJ). Tem experiência docente na área de Probabilidade e Estatística. Atua principalmente nos seguintes temas: Estatística Experimental Superfície de resposta, Análise de regressão, Modelos lineares generalizados, Modelos lineares generalizados mistos, Meta-análise. Contato: natel@ufsj.edu.br. (35)99979-0218.

Walter Martins Rodrigues

Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela USP (1987), onde também cursou o mestrado concluído em 2020 e doutorado em Matemática finalizado em 2005, na área de Representação de álgebras. Atualmente é professor Titular da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA). Exerceu a atividade de coordenador Pedagógico e pró-reitor adjunto de Graduação no período de agosto de 2013 a fevereiro de 2015. Coordenou o mestrado Profissional em Matemática da UFERSA de 2020 até março de 2023. Trabalha com pesquisa voltada para modelagem Matemática aplicada, Álgebra e Modelagem Estatística. Contato: Fone: 084988933633.

Joaquim Odilon Pereira

Possui Graduação em Engenharia Agrícola pela Universidade Federal da Paraíba – Campina Grande (1980), Mestrado em Engenharia Agrícola pela Universidade Federal de Viçosa (1986), Doutorado em Agronomia (Energia na Agricultura) pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (1996). É Pós-doutorado em Engenharia Agrícola com domínio em Dinâmica do solo na interação Solo-máquina pelo Institut National de la Recherche Agronomique – França (2002). Foi Professor Associado da Universidade Estadual do Oeste do Paraná do Curso de Graduação e Pós-graduação em Engenharia Agrícola no período de 1988 a 2006. Atualmente é Professor Titular da Universidade Federal Rural do Semi Árido – Mossoró – RN no curso de Engenharia Agrícola e Ambiental. Avaliador Institucional do INEP/MEC. Tem experiência na área de Engenharia Agrícola, com ênfase em Mecanização e Máquinas Agrícolas, atuando, principalmente, nos seguintes temas: Ergonomia, Dinâmica do solo no sistema de interação solo-máquina, Compactação do solo e Sistema de manejo do solo. Participa como colaborador de trabalhos científicos em coautoria com pesquisadores de instituições de ensino e pesquisa internacional e nacional. É revisor para periódicos nacionais e internacionais, tais como Engenharia Ambiental, Soil Use and Management, Journal of Agricultural Science, Journal of Terramechanics, Engenharia Agrícola e Agricultural Engineering International: CIGR Journal. Contato: 084999310198.

9 786581 460907

Pantanal Editora
Rua Abaete, 83, Sala B, Centro. CEP: 78690-000
Nova Xavantina – Mato Grosso – Brasil
Telefone (66) 99682-4165 (Whatsapp)
https://www.editorapantanal.com.br
contato@editorapantanal.com.br